26.

FECHA	jueves, 30 de noviembre de 2017

Señores
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
BIBLIOTECA
Ciudad

UNIDAD REGIONAL	Sede Fusagasugá
TIPO DE DOCUMENTO	Trabajo De Grado
FACULTAD	Educación
NIVEL ACADÉMICO DE FORMACIÓN O PROCESO	Pregrado
PROGRAMA ACADÉMICO	**Licenciatura en Matemáticas**

El Autor(Es):

APELLIDOS COMPLETOS	NOMBRES COMPLETOS	No. DOCUMENTO DE IDENTIFICACIÓN
Castillo García	Leonel Estiben	1069747201
Vásquez Sanabria	Miryam Rubyerlin	1069747688

Director(Es) y/o Asesor(Es) del documento:

APELLIDOS COMPLETOS	NOMBRES COMPLETOS
Barreto Moreno	Martha Lidia

TÍTULO DEL DOCUMENTO
EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA CICLOS DE VALIDACIÓN Y EDUCACIÓN PARA ADULTOS, CICLO V

SUBTÍTULO (Aplica solo para Tesis, Artículos Científicos, Disertaciones, Objetos Virtuales de Aprendizaje)

TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Aplica para Tesis/Trabajo de Grado/Pasantía
Licenciado(s) en matemáticas

AÑO DE EDICION DEL DOCUMENTO	NÚMERO DE PÀGINAS
23/11/2017	219

DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS (Usar 6 descriptores o palabras claves)	
ESPAÑOL	INGLÉS
1. Educación para adultos	Adult Education
2. Educación Matemática	Mathematical Education
3.Educación no formal	Non-formal Education
4. Educación inclusiva	Inclusive Education

5. Módulos impresos e interactivos	Printed and interactive modules
6. Currículo Flexible	Flexible curriculum

RESUMEN DEL CONTENIDO EN ESPAÑOL E INGLÉS
(Máximo 250 palabras – 1530 caracteres, aplica para resumen en español):

RESÚMEN.

La educación para adultos en Colombia es asumida principalmente por instituciones de Educación para el trabajo y el desarrollo humano, además, algunas instituciones de carácter oficial o privada en Fusagasugá han abierto programas de educación para adultos, según la Ley 115 de 1994 estas instituciones se encargan de ofrecer proyectos educativos con currículos flexibles y que a diferencia de los grados propios de la educación formal, éstos pueden ser en ámbitos laborales o académicos permitiendo de esta manera, que aquellas personas que por diversos motivos hayan dejado sus estudios, puedan complementar o actualizar su educación.
A lo largo de dos años de experiencia como docentes en una institución que brinda servicios de educación por ciclos para jóvenes extra edad y adultos en la ciudad de Fusagasugá; se realizó un proceso evaluativo a los módulos de trabajos para ciclo V que allí se implementan, basándonos en las propuestas por el Ministerio Educación Nacional, y al escaso tiempo que se tiene para desarrollar los mismos. Como resultado evaluativo y con el apoyo de un planificador de clases se construye un módulo de trabajo impreso que permite la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos en el área de matemáticas, además, cuenta con una estructura evaluativa basado en los formatos presentes en las pruebas estandarizadas.
Este módulo permite al docente tener un material de apoyo para la previa planificación y estructuración de sus clases, y a la vez permite a los estudiantes contar con un material de estudio de fácil lectura.

ABSTRACT.

Adult education in Colombia is mainly assumed by institutions of education for work and human development, in addition, some institutions of an official or private character in Fusagasugá have opened adult education programs, according to the Law 115 of 1994 these institutions are in charge of offering educational projects with flexible curricula and that, unlike the specific degrees of formal education, they can be in work or academic fields, thus

allowing those people That for various reasons have left their studies, can supplement or update their education.
Over two years of experience as a teacher in an institution that provides cycle education services for young and old adults in the city of Fusagasugá; An evaluative process was carried out to the modules of works for cycle V that are implemented there, based on the proposals by the Ministry of National Education, and to the scarce time that one has to develop the same ones. As an evaluative result and with the support of a class planner is built a module of printed work that allows the teaching and the learning of the contents in the area of mathematics, in addition, it has an evaluative structure based on the formats Present in standardized tests.
This module allows the teacher to have a support material for the previous planning and structuring of their classes, and at the same time allows students to have an easy-to-read study material.

AUTORIZACION DE PUBLICACIÒN

Por medio del presente escrito autorizo (Autorizamos) a la Universidad de Cundinamarca para que, en desarrollo de la presente licencia de uso parcial, pueda ejercer sobre mí (nuestra) obra las atribuciones que se indican a continuación, teniendo en cuenta que, en cualquier caso, la finalidad perseguida será facilitar, difundir y promover el aprendizaje, la enseñanza y la investigación.

En consecuencia, las atribuciones de usos temporales y parciales que por virtud de la presente licencia se autoriza a la Universidad de Cundinamarca, a los usuarios de la Biblioteca de la Universidad; así como a los usuarios de las redes, bases de datos y demás sitios web con los que la Universidad tenga perfeccionado una alianza, son:
Marque con una “X”:

AUTORIZO (AUTORIZAMOS)	SI	NO
1. La reproducción por cualquier formato conocido o por conocer.		X
2. La comunicación pública por cualquier procedimiento o medio físico o electrónico, así como su puesta a disposición en Internet.	X	
3. La inclusión en bases de datos y en sitios web sean éstos onerosos o gratuitos, existiendo con ellos previa alianza perfeccionada con la Universidad de Cundinamarca para efectos de satisfacer los fines previstos. En este evento, tales sitios y sus usuarios tendrán las mismas facultades que las aquí concedidas con las mismas limitaciones y condiciones.	**X**	
4. La inclusión en el Repositorio Institucional.	X	

De acuerdo con la naturaleza del uso concedido, la presente licencia parcial se otorga a título gratuito por el máximo tiempo legal colombiano, con el propósito de que en dicho lapso mi (nuestra) obra sea explotada en las condiciones aquí estipuladas y para los fines indicados, respetando siempre la titularidad de los derechos patrimoniales y morales correspondientes, de acuerdo con los usos honrados, de manera proporcional y justificada a la finalidad perseguida, sin ánimo de lucro ni de comercialización.

Para el caso de las Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, de manera complementaria, garantizo(garantizamos) en mi(nuestra) calidad de estudiante(s) y por ende autor(es) exclusivo(s), que la Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi(nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro (aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos de la Tesis o Trabajo de Grado es de mí (nuestra) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

Sin perjuicio de los usos y atribuciones otorgadas en virtud de este documento, continuaré (continuaremos) conservando los correspondientes derechos patrimoniales sin modificación o restricción alguna, puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación de los derechos patrimoniales derivados del régimen del Derecho de Autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, *"Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores"*, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables. En consecuencia, la Universidad de Cundinamarca está en la obligación de RESPETARLOS Y HACERLOS RESPETAR, para lo cual tomará las medidas correspondientes para garantizar su observancia.

NOTA: (Para Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía):

Información Confidencial:

Esta Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, contiene información privilegiada, estratégica, secreta, confidencial y demás similar, o hace parte de la investigación que se adelanta y cuyos resultados finales no se han publicado. **SI ___ NO _X__**.
En caso afirmativo expresamente indicaré (indicaremos), en carta adjunta tal situación con el fin de que se mantenga la restricción de acceso.

LICENCIA DE PUBLICACIÒN

Como titular(es) del derecho de autor, confiero(erimos) a la Universidad de Cundinamarca una licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integrará en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha de inclusión en el repositorio, por un plazo de 5 años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del autor. El autor podrá dar por terminada la licencia solicitándolo a la Universidad por escrito. (Para el caso de los Recursos Educativos Digitales, la Licencia de Publicación será permanente).

b) Autoriza a la Universidad de Cundinamarca a publicar la obra en formato y/o soporte digital, conociendo que, dado que se publica en Internet, por este hecho circula con un alcance mundial.

c) Los titulares aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto, renuncian a recibir beneficio alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente licencia y de la licencia de uso con que se publica.

d) El(Los) Autor(es), garantizo(amos) que el documento en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi (nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro(aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos es de mí (nuestro) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

e) En todo caso la Universidad de Cundinamarca se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del autor y la fecha de publicación.

f) Los titulares autorizan a la Universidad para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

g) Los titulares aceptan que la Universidad de Cundinamarca pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

h) Los titulares autorizan que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados en los literales anteriores bajo los límites definidos por la universidad en el "Manual del Repositorio Institucional AAAM003"

i) Para el caso de los Recursos Educativos Digitales producidos por la Oficina de Educación Virtual, sus contenidos de publicación se rigen bajo la Licencia Creative Commons: Atribución- No comercial- Compartir Igual.

j) Para el caso de los Artículos Científicos y Revistas, sus contenidos se rigen bajo la Licencia Creative Commons Atribución- No comercial- Sin derivar.

Nota:
Si el documento se basa en un trabajo que ha sido patrocinado o apoyado por una entidad, con excepción de Universidad de Cundinamarca, los autores garantizan que se ha cumplido con los derechos y obligaciones requeridos por el respectivo contrato o acuerdo.

La obra que se integrará en el Repositorio Institucional, está en el(los) siguiente(s) archivo(s).

Nombre completo del Archivo Incluida su Extensión (Ej. PerezJuan2017.pdf)	Tipo de documento (ej. Texto, imagen, video, etc.)
1. Educación matemática para ciclos de validación y educación para adultos, Ciclo V.pdf	Texto
2.	
3.	
4.	

En constancia de lo anterior, Firmo (amos) el presente documento:

APELLIDOS Y NOMBRES COMPLETOS	FIRMA (autógrafa)
Castillo García Leonel Estiben	
Vásquez Sanabria Miryam Rubyerlin	

12.1.50

EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA CICLOS DE VALIDACIÓN Y EDUCACIÓN PARA ADULTOS

CICLO V

Leonel Estiben Castillo García & Miryam Rubyerlin Vásquez Sanabria

Octubre 2017.

Universidad de Cundinamarca.

Facultad de Educación.

Licenciatura en Matemáticas

EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA CICLOS DE VALIDACIÓN Y EDUCACIÓN PARA ADULTOS

CICLO V

Leonel Estiben Castillo García

Cód. 171212220

&

Miryam Rubyerlin Vásquez Sanabria

Cód. 171213128

Asesora:

Martha Lidia Barreto Moreno

Magister en Educación con énfasis en Docencia Universitaria

Octubre 2017.

Universidad de Cundinamarca.

Facultad de Educación.

Licenciatura en Matemáticas

DEDICATORIA

Dedicamos este proyecto inicialmente a Dios por permitirnos llegar hasta este momento tan importante de nuestra formación profesional. A nuestros padres quienes con su incondicional apoyo nos han forjado como profesionales íntegros y cuyo ser ha sido ejemplo para nuestras vidas, su motivación constante fue nuestra fortaleza para entregar lo mejor de nosotros.

Delfo Castillo, Julia García

&

Genaro Vásquez, Patricia Sanabria

AGRADECIMIENTOS

Nuestra más sincera gratitud a todos aquellos que participaron de manera directa o indirecta en la construcción de este proyecto, agradecemos a nuestros padres por todo su apoyo y colaboración; a nuestros compañeros y amigos por su colaboración, compañía y por todos los momentos compartidos y de manera especial, queremos agradecer a la Magister Martha Lidia Barreto Moreno quien con su colaboración y disposición constante nos ayudó y guio este proceso al éxito.

‘‘Sólo porque algo no haga lo que era previsto no quiere decir que sea inútil el esfuerzo’’

Thomas Alva Edison

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.

"En Colombia, de conformidad con lo establecido en la Ley 115 de 1994, el Decreto 3011 de 1997, Decreto 114 de 1996 y el Decreto 1860 de 1994, la educación se define como un proceso de formación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona humana, su dignidad, sus derechos y sus deberes"; así mismo, la educación se considera como un derecho social en el Artículo 67 de la Constitución Política de Colombia de 1991, por tanto, se debe garantizar el libre acceso a los diferentes niveles de formación definidos por la Ley general de Educación 115 de 1994.

La deserción escolar sigue siendo una realidad para el país debido a causas como, la necesidad por parte de los estudiantes de trabajar para responder por sus familias, el tiempo requerido por la educación formal y la poca flexibilidad en el currículo los llevan a desistir de la idea de completar sus programas de formación. Por otra parte, en ocasiones son los mismos estudiantes quienes no logran ajustarse a los servicios educativos brindados por las instituciones, tomando la decisión de retirarse de estos procesos y optan por el ingreso al modelo de educación no formal, y educación para adultos.

Es aquí donde "EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA CICLOS DE VALIDACIÓN Y EDUCACIÓN PARA ADULTOS, CICLO V" con el permiso y el apoyo del Instituto de Validación por ciclos CENCOV sede Fusagasugá, quiere intervenir en los procesos educativos, específicamente en el área de matemáticas correspondientes a ciclo V de validación (el homólogo del grado décimo en la educación formal), mediante el diseño y la construcción de un material de trabajo impreso y/o digital que permita a estudiantes y docentes, comprender los contenidos matemáticos de manera asertiva, acercándolos a los formatos de las pruebas estandarizadas y teniendo en cuenta que el tiempo del que se dispone para la enseñanza de los mismos es bastante corto en comparación al tiempo dispuesto en la educación formal; el tiempo destinado por el Instituto Cencov para el desarrollo de los contenidos correspondientes a matemáticas es de 2 horas diarias a lo largo de 15 días hábiles.

TÍTULO

EDUCACIÓN MATEM ÁTICA PARA CICLOS DE VALIDACI ÓN Y EDUCACIÓN PARA ADULTOS, CICLO V

RESUMEN.

La educación para adultos en Colombia es asumida principalmente por instituciones de Educación para el trabajo y el desarrollo humano, además, algunas instituciones de carácter oficial o privada en Fusagasugá han abierto programas de educación para adultos, según la Ley 115 de 1994 estas instituciones se encargan de ofrecer proyectos educativos con currículos flexibles y que a diferencia de los grados propios de la educación formal, éstos pueden ser en ámbitos laborales o académicos permitiendo de esta manera, que aquellas personas que por diversos motivos hayan dejado sus estudios, puedan complementar o actualizar su educación.

A lo largo de dos años de experiencia como docentes en una institución que brinda servicios de educación por ciclos para jóvenes extra edad y adultos en la ciudad de Fusagasugá; se realizó un proceso evaluativo a los módulos de trabajos para ciclo V que allí se implementan, basándonos en las propuestas por el Ministerio Educación Nacional, y al escaso tiempo que se

tiene para desarrollar los mismos. Como resultado evaluativo y con el apoyo de un planificador de clases se construye un módulo de trabajo impreso que permite la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos en el área de matemáticas, además, cuenta con una estructura evaluativa basado en los formatos presentes en las pruebas estandarizadas.

Este módulo permite al docente tener un material de apoyo para la previa planificación y estructuración de sus clases, y a la vez permite a los estudiantes contar con un material de estudio de fácil lectura.

CAPITULO 1.

1. DEFINICION DEL PROBLEMA

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Desde la experiencia de aula como docentes en programas de validación por ciclos , en un tiempo aproximado de dos años, se evidenció como uno de los puntos críticos a resaltar, la escasa preparación de los módulos de trabajo en el área de matemáticas y los vacíos que se generan a causa del corto tiempo que se dispone para el desarrollo de los mismos, además no es evidenciable una relación directa entre los módulos de trabajo y los formatos que se plantean en las pruebas estandarizadas; por tanto, los estudiantes no cuentan con una interacción cercana a este formato hasta el momento de cursar el último año académico, impidiendo un desempeño exitoso en las pruebas estandarizadas.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.

Los módulos de trabajo diseñados en el área de matemáticas para los estudiantes de Ciclo V pertenecientes al instituto de Validación Cencov sede Fusagasugá, presentan falencias en su planeación, diseño y estructura ya que no se ajustan a los tiempos ofrecidos por la institución para el desarrollo de los núcleos temáticos, además de no brindar una preparación directa a los estudiantes para las pruebas estandarizadas.

Se requiere entonces el diseño de un material bibliográfico impreso y/o digital, cuya estructura y presentación de los temas sea clara y de fácil lectura para el estudiante y que se ajuste a los tiempos ofrecidos por la institución para su desarrollo.

1.3 JUSTIFICACIÓN.

La educación continua se debe garantizar para todo tipo de población ya que se consagra como un derecho social en la constitución política de Colombia, este derecho se hace efectivo por medio de instituciones para el trabajo y el desarrollo humano y algunas instituciones con programas de formación complementaria. Estas instituciones bajo la modalidad de Educación No formal ofrecen una estructura curricular más flexible, lo que permite que todas aquellas personas que quieren finalizar o complementar sus procesos de educación puedan hacerlo.

Aproximadamente en dos años de experiencia de aula como docentes en un instituto que ofrece programas de validación para la educación básica y media por ciclos, se encuentra que la metodología de trabajo consiste en el manejo de guías y módulos impresos los cuáles se desarrollan en un período de tiempo asignado por la institución. Uno de los problemas que se evidenció durante la etapa de observación y acompañamiento a la población de estudiantes es el corto tiempo del que se dispone para el desarrollo de todos los contenidos y competencias matemáticas propuestas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) a través de dichos módulos. Una segunda falencia, se encontró en la planeación, diseño y estructura de los módulos de trabajo que se implementan en cada ciclo, ya que es un material que presenta errores en la escritura matemática, es visualmente muy plano para el lector lo que llama poco la atención al leerlo, no muestra una estructura que relacione las competencias a desarrollar con los formatos de evaluación aplicados en pruebas estandarizadas como el Saber 11.

Estos dos factores juntos crean vacíos en lo aprendido por el estudiante y dificultan su desempeño al ingresar a programas de educación superior. Se hace necesario entonces, una intervención en estos procesos de tal manera que puedan suplirse las necesidades educativas de la población, formando personas competitivas y con aptitudes para desempeñarse en la educación superior y en el área laboral. Es aquí donde "Educación Matemática para ciclos de validación y Educación para adultos" quiere intervenir para mejorar y optimizar los procesos educativos, específicamente en el área de matemáticas para el nivel de formación "Ciclo V", Análogo al grado décimo de Educación Formal) ofrecido en el instituto de validación por ciclos Cencov con sede en Fusagasugá, mediante el diseño y presentación de un módulo de trabajo impreso y/o digital cuya planeación y estructura se ajuste a las necesidades de la población y al tiempo asignado por la institución para su desarrollo. De este módulo se espera que en corto tiempo se puedan desarrollar las competencias matemáticas básicas para los núcleos temáticos de Trigonometría y geometría analítica. Además, se pretende incentivar la participación del estudiante para que asuma su protagonismo en su proceso de formación.

El desarrollo de este proyecto pretende impactar en los aspectos social y académico de la siguiente manera.

Aportar y mejorar los procesos educativos para jóvenes extra-edad y adultos con la construcción del módulo de trabajo reforzando las competencias matemáticas de cada persona, de tal manera que sean personas aptas para el ingreso a la educación superior y a la vida laboral.

Académicamente, se pretende abrir una puerta para la investigación en educación matemática en la modalidad de educación no formal, inicialmente en la Licenciatura en Matemáticas ofrecida en la Universidad de Cundinamarca, dado que la licenciatura solo tiene convenios para trabajar con instituciones de básica primaria (Fundación MAUN) y cuenta con un convenio con la UNAD para el desarrollo de pasantía en educación superior.

1.4 OBJETIVOS.

1.4.1 Objetivo General.

Diseñar un módulo de trabajo impreso y/o digital como estrategia para mejorar los procesos de enseñanza en el área de matemáticas para el nivel de validación Ciclo V del instituto Cencov Fusagasugá.

1.4.2 Objetivos Específicos.

- Identificar las posibles falencias que presentan las guías de trabajo implementadas en el área de matemáticas para el nivel de ciclo V en el instituto Cencov.
- Planificar una estructura de núcleos temáticos para el desarrollo de competencias matemáticas acorde al tiempo destinado por el instituto Cencov.

- Diseñar secciones evaluativas en el módulo de trabajo para ciclo V del instituto Cencov basados en la estructura de las pruebas estandarizadas para la resolución de problemas.

CAPITULO 2.

2. ESTADO DEL ARTE

2.1 Marco de Antecedentes.

Fernández (1958) realiza un artículo para la edición 78 de la *Revista de Educación del Ministerio de Educación Nacional* de Madrid, España. En este artículo habla del origen de las escuelas radiofónicas para el sector rural en Colombia, el cual tuvo origen en 1948 con la iniciativa y liderazgo del sacerdote José Joaquín Salcedo dando origen a la Acción Cultural Popular en la emisora Sutatenza. Esta idea nació inicialmente por la necesidad que tenía el sacerdote de contar con la ayuda de los campesinos para la construcción de un tratero cultural en Sutatenza para ello conto con una pequeña e improvisada emisora que contaba con un transmisor de tan sólo 25 voltios, Salcedo al ver el gran impacto de su emisora decide aprovecharla para realizar un proyecto de alfabetización con los campesinos de Sutatenza. Viajó hasta Bogotá para solicitar la ayuda correspondiente para hacer posible el desarrollo de su interesante proyecto y cuando regreso al pueblo llego no sólo con un transmisor de 250 voltios, sino que también contó con la ayuda de dos profesores de una escuela tradicional.

Este proyecto contaba con la ayuda de campesinos que tuvieran más conocimientos que sus compañeros, éste se encargaba de ejecutar las órdenes del sacerdote para permitir la recolección de evidencias y así, conocer los resultados obtenidos de la alfabetización por radio, su trasmisión se realizaba una vez semanalmente, los sábados. Una de las características principales de esta educación es que no era un reemplazo de los docentes de las escuelas rurales para niños, era complemento para los adultos, para permitirles salir del analfabetismo; cuando se contaba con la participación de niños, que era algo que sucedía espontáneamente, era porque no se contaba con una escuela rural a la que pudieran asistir.

Para 1953, este movimiento toma tanta fuerza que ya contaba con un transmisor de 50 kilovatios y se forman 32.000 Escuelas Populares Radiofónicas lideradas por el movimiento Acción Cultural Popular con cerca de 600.000 alumnos por toda Colombia y 32.000 auxiliares, estas escuelas eran dirigidas principalmente por curas párrocos de la iglesia Católica, y contaban con un segundo nivel para aquellos ya alfabetizados por la Radio Sutatenza. Para ese entonces Sutatenza emitía 1 hora de transmisión escolar que se repetía cuatro veces al día, esta transmisión se dividía en media hora de alfabetización, cinco minutos de Catecismo Cristiano, diez minutos de cultura general y quince minutos de cursos campesinos; cada día se desarrollaba una materia diferente que comprendía aritmética, geografía básica de Colombia, historia de Colombia, urbanidad y conocimientos de cultura cívica.

En los cursos de alfabetización se preparaban con una cartilla individual, un juego de carteles con la reproducción en grande de las páginas de la cartilla y con la orientación del locutor en la Escuela Radiofónica. En los cursos campesinos se realizaba un estudio completo de las condiciones de los suelos, climas y enseñanzas socioeconómicas, además, contaba con un equipo de visitadores de la Escuela Radiofónica que realizaban demostraciones prácticas de lo enseñando por radio. En 1955 se realizó una recolección de evidencias que arrojaron como resultado 220.000 campesinos capaces de leer y escribir gracias a la Radio Sutatenza y su curso de alfabetización, y que cerca de tres millones de árboles fueron sembrados como resultado de los cursos campesinos.

Finalmente, por diversos problemas el 17 de febrero de 1989 Radio Sutatenza realizo su última emisión dejando como resultado 4.365 cursos en las comunidades rurales, cerca de 23.812 hombres y mujeres capacitados como líderes campesinos; 1.489.935 horas de transmisión y 6.453.937 cartillas entregadas gratuitamente. Sin dejar a un lado que esta labor social liderada por el sacerdote Salcedo fue adoptada y promovida por la Unesco en varios países que también contaron con resultados favorables. Desafortunadamente el 2 de diciembre de 1994 el sacerdote y fundador de Escuelas Radiofónicas en Colombia, José Joaquín Salcedo fallece a la edad de 72 años por complicaciones cardiacas, dejando una gran tristeza en aquellos que fueron participes de su labor, y a su vez dejando un importante legado en educación para campesinos en nuestro país.

Vizcaíno y Díaz (1983) publican un artículo denominado *Entusiasmo Y Desilusión De Un Programa De Educación A Distancia Por Televisión: El Caso Del Fondo De Capacitación Popular* para la Revista Colombiana de Educación, allí habla del origen del programa educativo de capacitación Popular por televisión que tuvo origen el 26 de febrero de 1967 con una primera transmisión por parte del entonces Presidente Carlos Lleras Restrepo , la creación del Fondo Popular se basaba en preparar a los colombianos involucrados en los sectores marginados por el desarrollo industrial. En sus inicios contaba con solo unos 50 telecentros en el oriente y sur de Bogotá, desafortunadamente contó con una deserción del 60% de los estudiantes que seguían las clases y no habían logrado mantener por más de una hora diaria su programación televisiva, al ver esta problemática en 1971 se hizo un intento por salvar el Fondo de Capacitación se implementa un cubrimiento en Bogotá, Cundinamarca y Tolima donde aparte de hacer programas para la alfabetización se podía discutir problemáticas de la comunidad y plantear estrategias para dar posibles soluciones.

Por otra parte, se crearon herramientas en Inravisión y el canal 11 diseñado específicamente para ver los programas de educación en todo el país que con la ayuda de cartillas impresas ofrecían programas científicos, recreativos e informativos que buscaban convertir la alfabetización de adultos en un elemento para el desarrollo del país. Además de ofrecer cursos para la educación correspondiente a primaria, en marzo de 1971 se crea un SENA por televisión que se encargaba de capacitar en un nivel primario a sus estudiantes en oficios varios, este programa es denominado “Oficios semi-calificados” y conto solo con 50 emisiones donde trataba temas como la reparación de planchas, conexiones eléctricas, mesas, ollas, y hasta como reutilizar elementos reciclables; sin embargo, no contó con la audiencia suficiente y fue suspendida su transmisión. En general la educación por televisión no tuvo los resultados que se esperaban y finalmente se dio por terminado el Fondo de Capacitación Popular.

Escuela Nueva es una alternativa en educación que fue creada y aplicada en Colombia en 1975 por Vicky Colbert, Beryl Levinger y Oscar Mogollon, quienes se enfocaron inicialmente en las escuelas rurales donde un solo docente atendía todos los grados correspondientes a primaria de manera simultánea, esta propuesta es innovadora y de alto rendimiento para la mejora de la educación, además ha tenido un gran impacto a nivel mundial.

Escuela Nueva se basa en cuatro componentes importantes: el curricular y el aula, comunitario, de capacitación y seguimiento, y la gestión; cuenta con currículo flexible que se adapta a las diferentes necesidades de los estudiantes permitiéndoles avanzar de un grado a otro mediante su propio ritmo de aprendizaje. Su impacto ha sido tan positivo en la comunidad que durante las décadas del 80 y 90 se llegó a más de 20.000 escuelas rurales en todo el país; en 1989 esta propuesta fue seleccionada por el Banco Mundial como una de las reformas más exitosas a nivel mundial, en 1998 según la Unesco Colombia logro la mejor educación rural en América Latina obteniendo mejores resultados que la escuela tradicional urbana; además. En el 2000 fue reconocida como uno de los mayores logros del país, según el informe de Desarrollo Humano de naciones Unidas.

La Caja de Compensación Familiar, CAFAM crea en 1981 el Programa de Educación Continuada para Adultos, inicialmente este programa se dirigió a la población afiliada a Cafam, sin embargo, en la actualidad cubre gran parte del territorio nacional, llegando a sectores de la población urbana en situación de vulnerabilidad, rural, desplazada, desvinculada del conflicto, trabajadora, desempleada, indígena y afrodescendiente; todo esto es posible a través del Ministerio de Educación Nacional, Federación de Cafeteros, Cajas de Compensación, Organizaciones de Servicio Social, Comunidades Religiosas, Secretarias de Educación Departamentales, Alcaldías, Colegios, Empresas, e Instituciones de Rehabilitación Social. Cuenta con dos centros de estudio en Bogotá: Colegio Cafam y Cafam Centenario, para este último, la matricula promedia es de 3.000 personas.

El proceso de aprendizaje se desarrolla de manera independiente en casa y de manera social, trabajando en pequeños grupos en una institución o centro de aprendizaje; permite una participación abierta sin necesidad de certificados de estudio, ya que se realizan pruebas diagnósticas que permiten identificar la etapa de iniciación de acuerdo a los conocimientos previos del estudiante. La intensidad de horas va de 4 a 8 horas semanales ya que tienen la posibilidad de estudiar de manera independiente, sin embargo, en las sesiones presenciales el estudiante refuerza su aprendizaje bajo las orientaciones de un monitor o tutor; éste tutor acompaña el proceso de aprendizaje aclarando dudas y evaluando el proceso metodológico y el desarrollo adecuado de los materiales. Los estudiantes aprenden a su propio ritmo según sus capacidades y esfuerzo, guiados por módulos de trabajo que mediante una evaluación les permite pasar de una competencia a otra, así el estudiante no necesitará esperar un tiempo fijado para avanzar en sus estudios. Este programa está dividido en 5 etapas (ciclos) destinadas a desarrollarse en un mediano plazo.

a) Desarrollo de Destrezas de Lecto-escritura (Alfabetización)

b) Etapa Fundamental (Básica Primaria)

c) Etapa Complementaria (Básica Secundaria 6º y 7º)

d) Etapa de Áreas Básicas de Interés (Básica Secundaria 8º y 9º)

e) Etapa de Áreas Avanzadas de Interés (Educación Media 10º y 11º)

Además, cada etapa está conformada por competencias organizadas de la siguiente manera:

Durante estos más de 30 años del programa, Cafam ha tenido un impacto positivo en nuestro país ya que, anualmente cuenta con un promedio de 100.000 participantes en todo el país y ha recibido reconocimientos importantes a nivel nacional e internacional:

- 1984 - Mención de Honor Premio Noma de Alfabetización, otorgado por la Unesco-París.
- 1986 - Selección por el Instituto de Educación de Adultos de la Unesco de Hamburgo como Sistema de Evaluación de Aprendizaje para Adultos.
- 1995 - Mención de Honor Premio Rey Sejong, otorgado por la Unesco-París.
- 1996 - Selección por el Instituto de Educación de Adultos de la Unesco de Berlín como Modelo de Programa Innovador en el Mundo. Publicado en seis idiomas: chino, árabe, inglés, francés, alemán y español.
- 2003 - Selección por parte de la PREAL como experiencia exitosa en América Latina en el mejoramiento de la equidad.
- 2004 - Selección por parte del Convenio Andrés Bello como una de las mejores prácticas para los países miembros.

ETAPAS	METAS ACADÉMICAS
Areas Avanzadas de Interés **(Ciclos V y VI)**	**Educación Media Vocacional** Español Cálculo Trigonometría Física Química Filosofía Inglés
Areas Básicas de Interés **(Ciclo IV)**	**Básica Secundaria** Español Matemática Ciencias Sociales Inglés
Complementaria **(Ciclo III)**	Ciencias Sociales Español Matemática Inglés
Fundamental **(Ciclo II)**	**Básica Primaria** Sociales Ciencias Español Matemática
Destrezas de Lecto-escritura **(Ciclo I)**	**Alfabetización** Español Matemática

La Fundación para el Desarrollo Social *Transformemos* es una organización creada el 21 de noviembre de 2006, esta fundación está enfocada educar jóvenes y adultos entre los 15 y 60 años que por diversos motivos decidieron retirarse de la educación formal o que nunca han pertenecido a él, esta propuesta educativa se caracteriza por contar con estudiantes en estado de pobreza o indigencia.

Se desarrolla inicialmente con la investigación etnográfica y procesos pedagógicos de cada una de las comunidades y la focalización de los estudiantes para determinar sus falencias y así, construir módulos didácticos impresos e interactivos que suplan con las necesidades características de la población, además se realiza un proceso evaluativo continuo y su impacto social. Sus módulos de trabajo cuentan con cuatro áreas temáticas que involucran 9 áreas obligatorias: Matemáticas, Comunicación y Lenguaje, Biología y ciencias ambientales, y ciencias sociales.

Con el decidido apoyo de la Secretaría de Educación, los Rectores, los Directores de Núcleo Educativo y los coordinadores se ha logrado seleccionar, capacitar y articular a los Docentes Transformadores/as con las Instituciones Educativas donde se implementa el Modelo. "Documento tomado de la página web de la Secretaria de Educación de Boyacá".

AÑO	LUGAR	AUTOR	PALABRAS CLAVES
1958	Madrid España	Enrique Wartela Fernández	• Alfabetización • Escuelas Radiofónicas • Cursos campesinos • Educación complementaria
1983	Bogotá Colombia	Milciades Vizcaíno Julio Ernesto Díaz	• Educación por televisión • Alfabetización • Estudiantes en oficios varios
1975	Colombia	Vicky Colbert Beryl Levinger Oscar Mogollon	• Alfabetización • Educación rural • Currículo Flexible • Educación Inclusiva
1981	Colombia	Caja de Compensación Familiar, CAFAM	• Educación independiente y grupal • Educación inclusiva • Integración social • Autoaprendizaje
2006	Colombia	Organización privada de la sociedad civil	• Educación inclusiva • Módulos impresos e interactivos • Proceso evaluativo continuo

2.2 Marco Teórico

Educación en Colombia: “La educación en Colombia es un derecho social según la Constitución política de Colombia de 1991 y está regida bajo Ley General de Educación – ley 115- de 1994.

Objeto de la ley. La educación es un proceso de formación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona humana, de su dignidad, de sus derechos y de sus deberes. La presente Ley señala las normas generales para regular el Servicio Público de la Educación que cumple una función social acorde con las necesidades e intereses de las personas, de la familia y de la sociedad. Se fundamenta en los principios de la Constitución Política sobre el derecho a la educación que tiene toda persona, en las libertades de enseñanza, aprendizaje, investigación y cátedra y en su carácter de servicio público. De conformidad con el artículo 67 de la Constitución Política, define y desarrolla la organización y la prestación de la educación formal en sus niveles preescolar, básica (primaria y secundaria) y media, no formal e informal, dirigida a niños y jóvenes en edad escolar, a adultos, a campesinos, a grupos étnicos, a personas con limitaciones físicas, sensoriales y psíquicas, con capacidades excepcionales, y a personas que requieran rehabilitación social". *(Ley 115)*

Educación formal: "Se entiende por educación formal aquella que se imparte en establecimientos educativos aprobados, en una secuencia regular de ciclos lectivos, con sujeción a pautas curriculares progresivas, y conducente a grados y títulos".

Educación no formal: "La educación no formal es la que se ofrece con el objeto de complementar, actualizar, suplir conocimientos y formar en aspectos académicos o laborales sin sujeción al sistema de niveles y grados establecidos en el artículo 11 de la Ley 115 de 1994.

La educación no formal se rige por los principios y fines generales de la educación establecidos en la presente Ley. Promueve el perfeccionamiento de la persona humana, el conocimiento y la reafirmación de los valores nacionales, la capacitación para el desempeño artesanal, artístico, recreacional, ocupacional y técnico, la protección y aprovechamiento de los recursos naturales y la participación ciudadana y comunitaria. En las instituciones de educación no formal se podrán ofrecer programas de formación laboral en artes y oficios, de formación académica y en materias conducentes a la validación de niveles y grados propios de la educación formal, definidos en la presente Ley". *(Ley 115, A. 36-38).*

Educación inclusiva: "Integración con el servicio educativo. La educación para personas con limitaciones físicas, sensoriales, psíquicas, cognoscitivas, emocionales o con capacidades intelectuales excepcionales, es parte integrante del servicio público educativo. Los establecimientos educativos organizarán directamente o mediante convenio, acciones pedagógicas y terapéuticas que permitan el proceso de integración académica y social de dichos educando" *(Ley 115 A. 46)*

*Educación rural: "*Fomento de la educación campesina. Con el fin de hacer efectivos los propósitos de los artículos 64 y 65 de la Constitución Política, el Gobierno Nacional y las entidades territoriales promoverán un servicio de educación campesina y rural, formal, no formal, e informal, con sujeción a los planes de desarrollo respectivos. Este servicio comprenderá especialmente la formación técnica en actividades agrícolas, pecuarias, pesqueras, forestales y agroindustriales que contribuyan a mejorar las condiciones humanas, de trabajo y la calidad de vida de los campesinos y a incrementar la producción de alimentos en el país". *(Ley 115 A 64)*

*Educación para adultos: "*La educación de adultos es aquella que se ofrece a las personas en edad relativamente mayor a la aceptada regularmente en la educación por niveles y grados del servicio público educativo, que deseen suplir y completar su formación, o validar sus estudios. El Estado facilitará las condiciones y promoverá especialmente la educación a distancia y semipresencial para los adultos. Son objetivos específicos de la educación de adultos:

a) Adquirir y actualizar su formación básica y facilitar el acceso a los distintos niveles educativos;

b) Erradicar el analfabetismo;

c) Actualizar los conocimientos, según el nivel de educación, y

d) Desarrollar la capacidad de participación en la vida económica, política, social, cultural y comunitaria". *(Ley 115 A. 50-51)*

CAPITULO 3.

3. MARCO METODOLOGICO

3.1 Tipo de Investigación.

El presente trabajo de investigación pasó por diferentes etapas de desarrollo que enmarcaron y definieron los aspectos metodológicos dando una identidad al resultado.

Esta monografía de investigación tuvo un proceso que atravesó varios estadios de desarrollo, a continuación identificaremos los aspectos exploratorios, descriptivos, y predictivos del proceso y como se llega a la propuesta del diseño de la guía de trabajo, definiendo por tanto el tipo de investigación a la cual nos acercamos.

El primer estadio por el cual transcurrió este proceso fue la fase de exploración, desarrollada a partir del año 2015 en el instituto Cencov sede Fusagasugá, en este año se inicia una serie de trabajos de acompañamientos a la institución como docentes de matemáticas en los diferentes niveles de educación básica y media por ciclos, en esta primera fase se puede reconocer la diversidad de la población con la que se trabaja, dado que encontramos estudiantes cuyo rango de edad varía desde los 16 hasta los 60 años. También se logra reconocer que la metodología de trabajo dentro de la institución es el manejo de guías y materiales impresos los cuales son utilizados por los estudiantes y docentes para el desarrollo de las clases en un periodo de tiempo aproximado de quince días hábiles.

Luego de interactuar con la modalidad de educación para adultos y con la oferta de educación básica y media por ciclos lectivos especiales dentro de la institución, y teniendo en cuenta los aspectos evaluativos sobre la población se encuentran una serie de focos problemáticos que entrarán en la fase descriptiva del proyecto.

El equipo de trabajo logra identificar unos puntos críticos dentro del proceso educativo para los ciclos de validación, estos puntos se pueden resumir en: Escaso tiempo para el desarrollo de las competencias matemáticas propuestas por el MEN, ya que se trabaja en un periodo de quince días hábiles, con sesiones de dos horas diarias los núcleos temáticos correspondientes a la planeación de un año escolar. Además, luego de un proceso de evaluación se evidencia una serie de falencias sobre los módulos de trabajo implementados, problemas que se pueden describir como escasa preparación de los temas a tratar, débil estructura evaluativa ya que no permite proximidad a los formatos de las pruebas estandarizadas.

Por lo anterior, “Educación Matemática para ciclos de validación y Educación para adultos” encuentra su tercera etapa, la fase predictiva. En este punto, analizando el proceso de evaluación sobre las guías de trabajo existentes y con base en los diarios de planeación de clase y las bitácoras de clase hechas como docentes en proceso de investigación, se piensa en una alternativa que permita mejorar los procesos educativos en el área de matemáticas para el nivel de ciclo V. La solución a proponer consiste en un material bibliográfico que se ajuste al tiempo brindado a los estudiantes para el desarrollo de competencias matemáticas.

En resumen, el equipo de “Educación Matemática para ciclos de validación y Educación para adultos” se propone diseñar un módulo de trabajo impreso y/o digital como estrategia para mejorar los procesos de enseñanza en el área de matemáticas para el nivel de validación Ciclo V del instituto Cencov Fusagasugá.

Basados en las diferentes fases por las que atravesó este proyecto de investigación y teniendo en cuenta que la propuesta por parte del equipo de trabajo es el de diseñar un material, con el cual se espera mejorar los procesos educativos solucionando los problemas de tiempo y falta de preparación de los módulos, se puede concluir que se hace referencia a una investigación holística de tipo proyectiva.

3.2 Método y Tipo de Muestreo.

Para el desarrollo de este proyecto se contó con una primera fase de exploración lo que permitió un acercamiento a la población con la que se trabajó, en base a ello se puede establecer que el método para seleccionar la muestra de la población es el muestreo no aleatorio o muestreo de juicio, la experiencia adquirida al trabajar con la población fue determinante a la hora de realizar la escogencia de la muestra aleatoria para la cual se enfocará el diseño del nuevo material de trabajo.

3.3 Población y Muestra.

Para el desarrollo de este proyecto de investigación fue de vital importancia la vinculación a la modalidad de educación no formal por parte de los investigadores. Para efectos de delimitación del proyecto vamos a considerar nuestra población de estudio como todos aquellos estudiantes vinculados al instituto Cencov sede Fusagasugá inscritos a los programas de ciclos lectivos especiales para la validación de sus estudios en los niveles de educación media.

A pesar de que el método utilizado para determinar el subconjunto al que será dirigida la propuesta fue el muestreo de juicio, podemos considerar que la muestra escogida es una muestra aleatoria ya que incluye varios grupos de estudiantes. Con el fin de delimitar el proyecto, explícitamente se puede definir la muestra cómo, todos aquellos estudiantes vinculados al instituto Cencov sede Fusagasugá inscritos a los programas de ciclos lectivos especiales para la validación de sus estudios que se encuentran en el nivel de Ciclo V, se incluye aquí los estudiantes que pertenecen a la jornadas diurna, nocturna y sabatinas mañana y tarde que se encuentran en un rango de edad de 16-50 años, cada grupo tiene un promedio de 20 estudiantes. Este tipo de muestreo lo podemos denominar como muestreo estratificado ya que se crean categorías de clasificación para los elementos de la población.

3.4 Técnicas y recolección de datos.

Durante los dos años de trabajo con los individuos pertenecientes a la muestra establecida anteriormente, se utilizaron varias herramientas de evaluación con el fin de medir la efectividad de las guías de trabajo implementadas. Algunas de estas herramientas consistían en pruebas diagnósticas y evaluativas que permitieran medir el nivel de asertividad de los módulos de trabajo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Otra herramienta que permitió el diseño y la construcción del módulo de trabajo propuesto por “Educación Matemática para ciclos de validación y Educación para adultos”, fue la utilización del planeador de clase en el cual se documenta los temas a trabajar en cada sesión de trabajo. Por último, se puede referenciar la utilización de una bitácora de clase en la cual se registra los temas trabajados en cada sesión de clase, el tiempo requerido para cada tema y las fortalezas y debilidades encontradas en los estudiantes y en las guías de trabajo.

3.5 Análisis de Resultados.

El análisis de resultados se toma desde una perspectiva de retroalimentación ya que se busca enfatizar en el mejoramiento de los resultados en las pruebas, además del desarrollo eficaz de las competencias matemáticas. Por otra parte, se necesita evidenciar que tan próximo o alejado se encuentra el módulo de trabajo existente a los tiempos determinados por la institución para su desarrollo y su efectividad en la transmisión de contenidos.

Un ejemplo sobre un resultado arrojado en el análisis es que, el tiempo se quedaba corto respecto a la guía de trabajo ya que la unidad de geometría analítica no se podía trabajar completa, siempre se llegaba apenas al inicio de la discusión de secciones cónicas.

CAPITULO 4.

4. DERIVACION PRÁCTICA

El formato de derivación práctica se encuentra en los anexos al final del documento.

CAPITULO 5.

5. RESULTADOS

Este proyecto de investigación en su desarrollo contó con una socialización en un evento nacional de educación matemática en la Universidad de los Andes, además, como resultado del proceso de investigación se diseñó un módulo de trabajo para el nivel de ciclo V del instituto de validación por ciclos Cencov Fusagasugá. Este módulo se podrá encontrar en los anexos al documento al final. A continuación se relacionarán dos importantes resultados encontrados a lo largo de la investigación.

5.1 Socialización en el FORO EMAD 2017.

El día 06 de octubre de 2017 se llevó a cabo en la ciudad de Bogotá en las instalaciones de la universidad de los Andes el “Foro EMAD 2017, Educación matemática en la educación media”, en el cuál se tuvo la oportunidad de participar como ponentes de una sesión de comunicaciones.

En este evento se presentó el proyecto desarrollado en el instituto de validación Cencov, se dio a conocer el porqué y el para qué del proyecto, mostrando las dificultades que presenta la población con el uso de los antiguos módulos. La participación en esta actividad se planteó como un proceso de retroalimentación que permitió el fortalecimiento de algunos aspectos estructurales de la propuesta y del módulo que se presentará como resultado, se observó una buena acogida a la propuesta por parte de los demás colegas presentes en el auditorio, dado que los procesos de educación inclusiva y educación para adultos no se pueden dejar de lado en el marco de la educación en Colombia.

5.2 Propuesta del Módulo de Trabajo

Dada la problemática encontrada en la modalidad de educación básica y media por ciclos lectivos especiales, presentamos una propuesta como alternativa de solución en el diseño de un módulo de trabajo en el área de matemáticas para el nivel de ciclo V del instituto de validación Cencov.

Anteriormente se mencionó que el tiempo asignado por la institución para el desarrollo de competencias matemáticas es de aproximadamente de quince días hábiles, Además, se postularon las falencias existentes en los anteriores módulos de trabajo, por lo anterior, el diseño y la estructura de nuestro módulo de trabajo presenta las siguientes características:

- Los núcleos temáticos se organizaron en 15 sesiones como propuesta para trabajar una sesión del libro cada clase.
- Los ejemplos, talleres y secciones evaluativas presentan formatos de preguntas contextualizadas con opción múltiple de respuesta, algunos ejemplos de ejercicios se desarrollan a partir de preguntas encontradas en simulacros de la prueba Saber 11.
- En el módulo diseñado se le da mayor importancia a la presentación visual, de tal manera que el estudiante encuentre un material fácil y atractivo para leer. Al enunciar

cada tema se procuró tener una gráfica de apoyo que permita un mejor entendimiento en el estudiante.

El modulo propuesto tiene el objetivo de ser lo más claro y preciso posible, de tal manera que cualquier persona pueda leerlo sin dificultad y entender cada tema que allí se desarrolla.

CAPITULO 6.

6. CONCLUSIONES

- La modalidad de educación no formal tiene características muy particulares que permite llevar al docente a escenarios inimaginables, permitiendo un desarrollo pedagógico en el que hacer docente donde el aprendizaje es un proceso constantes de retroalimentación.
- La fase exploratoria y descriptiva del proyecto permitió el reconocimiento de las falencias en los módulos de trabajo implementados hasta el momento en el instituto de validación, estas falencias estaban relacionadas con la falta de preparación y planeación de los contenidos y su relación con el tiempo para el desarrollo.
- Las pruebas estandarizadas se están enfocando en la resolución de problemas contextuales, exigiendo al estudiante capacidad de razonamiento y deducción. En los últimos años las pruebas en el área de matemáticas se han centrado en el pensamiento aleatorio dando importancia a la probabilidad y estadística.
- La utilización de herramientas como el planeador de clase y las bitácoras son un método efectivo a la hora de llevar un registro de las actividades realizadas en clase ya que permiten una

retroalimentación para mejorar los procesos de enseñanza lo que conduce al mejoramiento de la praxis académica.

- El diseño de una herramienta curricular para la aplicación en los diferentes niveles de educación es una tarea cuyo compromiso se debe mantener hasta el final, ya que del producto final depende el desarrollo de pensamiento y competencias matemáticas de los estudiantes, y a pesar de no ser para nada una tarea sencilla vale la pena realizarla. En el diseño y elaboración del módulo de trabajo se tuvo en cuenta una sugerencia brindada por un docente en el Foro EMAD cuando se estableció un filtro basado en los derechos básicos de aprendizaje.

CAPITULO 7.

7. RECOMENDACIONES

La educación es un proceso de cambio permanente donde se debe buscar su actualización y mejora frente a los nuevos retos de la sociedad, es un proceso que se ve sujeta a la diversidad cultural, étnica, religiosa entre otros de los lugares donde se quiera implementar; por tanto "Educación Matemática para Ciclos de Validación y Educación para Adultos" quiere postular las siguientes recomendaciones:

- Esta es una investigación abierta para quienes estén interesados en la aplicación y evaluación del módulo diseñado para ciclo V.

- Esta es una investigación abierta para quienes estén interesados en continuar el diseño y la construcción de los módulos de trabajo correspondientes a los demás ciclos de validación, respetando los derechos de autor.

- Actualmente la Universidad de Cundinamarca cuenta con convenios con instituciones como la fundación MAUN, La Escuela de Patrulleritos Y la Universidad Abierta y a Distancia UNAD, donde los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas pueden realizar sus prácticas y pasantías respectivamente; sin embargo queremos una puerta abierta para que los estudiantes opten los institutos de Educación para el Trabajo y Desarrollo Humano como otra alternativa para realizar sus prácticas o pasantías.

CAPITULO 8.

8. BIBILOGRAFIA.

Ministerio de Educación Nacional. (1994) *Ley 115: Ley general de educación*. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional. *Estándares básicos de competencias en Matemáticas.* Colombia

Rico, L. (2006) *Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas*. Revista de Educación Número Extraordinario 2006: PISA. Programa para la Evaluación Internacional. España.,pp 275-295

Fernández, E. W (1958) *Escuelas radiofónicas en Colombia* artículo para la edición 78 de la Revista de Educación del Ministerio de Educación Nacional de España., pp 19-21

Vizcaíno, M., Díaz, J.E (1983) *Entusiasmo Y Desilusión De Un Programa De Educación A Distancia Por Televisión: El Caso Del Fondo De Capacitación Popular* artículo para la Revista de Educación. Bogotá ., pp 53-76

Gerez, J., *Educación Matemática de jóvenes y adultos: La complejidad de la enseñanza en una oferta semipresencial*. Facultad de matemáticas, astronomía y física, Universidad de Córdoba. Argentina

Colbert, V., Levinger, B., Mogollon, O., (1975) Colombia *Escuela Nueva. URL:* http://escuelanueva.org/portal1/es/quienes-somos/modelo-escuela-nueva-activa/historia-del-modelo.html

*Fundación Transformemos (*2006*)* Url:http://www.transformemos.com/Quienes_Somos.html

9. ANEXOS Y COMPLEMENTARIOS.

A continuación se anexaran los documentos correspondientes a:

- La derivación práctica.
- La evidencia de la realización de bitácora (parcelador de clase)
- Partes del planeador de Clase
- Módulo de trabajo para ciclo V de validación para el área de matemáticas, diseñado por "Educación matemática para ciclos de validación y educación para adultos".

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

DERIVACIÓN PRÁCTICA - MONOGRAFÍA DE INVESTIGACIÓN

TITULO

"Educación Matemática para ciclos de validación y Educación para adultos, Ciclo V"

DESCRIPCIÓN

"Educación Matemática para ciclos de validación y Educación para adultos" es un proyecto de investigación que nace gracias a la vinculación de los docentes investigadores Leonel Castillo García y Miryam Rubyerlin Vásquez Sanabria a una institución adscrita a la modalidad de educación no formal que ofrece mediante un currículo flexible un programa de ciclos lectivos especiales para la validación de la educación básica y media. Durante las fases de exploración y descripción del proyecto y en la ejecución de la labor docente se evidencian una serie de problemáticas que dificultan los procesos educativos para la población. Una vez identificados los puntos críticos se analizan las posibles estrategias para desarrollar un plan de mejoramiento llegando así a la propuesta de diseñar un material bibliográfico que se ajuste a los tiempos ofrecidos por la institución y que supla las necesidades educativas de la población permitiendo el mejoramiento y optimización de los procesos educativos en la institución.

Este proyecto de investigación nace con la intención de mejorar la capacitación de los estudiantes inscritos en la modalidad de educación no formal quienes aún no finalizan sus estudios de educación básica y media, permitiendo de esta manera que al finalizar este proceso sean personas competitivas y con aptitudes para desempeñarse en la educación superior y en el mercado laboral. Luego de todo el proceso, este proyecto de investigación se toma como nuestra tesis de grado para obtener el título de Licenciados en Matemáticas.

JUSTIFICACIÓN.

La educación continua se debe garantizar para todo tipo de población ya que se consagra como un derecho social en la constitución política de Colombia, este derecho se hace efectivo por medio de instituciones para el trabajo y el desarrollo humano y algunas instituciones con programas de formación complementaria. Estas instituciones bajo la modalidad de Educación No formal ofrecen una estructura curricular más flexible, lo que permite que todas aquellas personas que quieren finalizar o complementar sus procesos de educación puedan hacerlo.

Aproximadamente en dos años de experiencia de aula como docentes en un instituto que ofrece programas de validación para la educación básica y media por ciclos, se encuentra que la metodología de trabajo consiste en el manejo de guías y módulos impresos los cuáles se desarrollan en un período de tiempo asignado por la institución. Uno de los problemas que se evidenció durante la etapa de observación y acompañamiento a la población de estudiantes es el corto tiempo del que se dispone para el desarrollo de todos los contenidos y competencias matemáticas propuestas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) a través de dichos módulos. Una segunda falencia, se encontró en la planeación, diseño y estructura de los módulos de trabajo que se implementan en cada ciclo, ya que es un material que presenta errores en la escritura matemática, es visualmente muy plano para el lector lo que llama poco la atención al leerlo, no muestra una estructura que relacione las competencias a desarrollar con los formatos de evaluación aplicados en pruebas estandarizadas como el Saber 11.

Estos dos factores juntos crean vacíos en lo aprendido por el estudiante y dificultan su desempeño al ingresar a programas de educación superior. Se hace necesario entonces, una intervención en estos procesos de tal manera que puedan suplirse las necesidades educativas de la población, formando personas competitivas y con aptitudes para desempeñarse en la educación superior y en el área laboral. Es aquí donde “Educación Matemática para ciclos de validación y Educación para adultos” quiere intervenir para mejorar y optimizar los procesos educativos, específicamente en el área de matemáticas para el nivel de formación “Ciclo V”, Análogo al grado décimo de Educación Formal) ofrecido en el instituto de validación por ciclos Cencov con sede en Fusagasugá, mediante el diseño y presentación de un módulo de trabajo impreso y/o digital cuya planeación y estructura se ajuste a las necesidades de la población y al tiempo asignado por la institución para su desarrollo. De este módulo se espera que en corto tiempo se puedan desarrollar las competencias matemáticas básicas para los núcleos temáticos de Trigonometría y geometría analítica. Además, se pretende incentivar la participación del estudiante para que asuma su protagonismo en su proceso de formación.

El desarrollo de este proyecto pretende impactar en los aspectos social y académico de la siguiente manera.

Aportar y mejorar los procesos educativos para jóvenes extra-edad y adultos con la construcción del módulo de trabajo reforzando las competencias matemáticas de cada persona, de tal manera que sean personas aptas para el ingreso a la educación superior y a la vida laboral. Académicamente, se pretende abrir una puerta para la investigación en educación matemática en la modalidad de educación no formal, inicialmente en la Licenciatura en Matemáticas ofrecida en la Universidad de Cundinamarca, dado que la licenciatura solo tiene convenios para trabajar con instituciones de básica primaria (Fundación MAUN) y cuenta con un convenio con la UNAD para el desarrollo de pasantía en educación superior.

Objetivos

9.1 Objetivo General.

Diseñar un módulo de trabajo impreso y/o digital como estrategia para mejorar los procesos de enseñanza en el área de matemáticas para el nivel de validación Ciclo V del instituto Cencov Fusagasugá.

9.2 Objetivos Específicos.

- Identificar las posibles falencias que presentan las guías de trabajo implementadas en el área de matemáticas para el nivel de ciclo V.
- Comprender la estructura de las pruebas estandarizadas para la resolución de problemas
- Planificar una estructura de núcleos temáticos para el desarrollo de competencias matemáticas acorde al tiempo destinado por la institución.

ESTRATEGIAS

Una vez identificados los puntos problemáticas que afectan los procesos educativos en los ciclos de validación, delimitamos nuestro proyecto a una muestra de la población que consiste en todos los estudiantes que se encuentran en el nivel de ciclo V, incluyendo las jornadas diurna, nocturna y sabatinas (mañana y tarde).

Para el desarrollo de este proyecto se implementaron estrategias que permitieron la recolección de información con la cual se logra el diseño del módulo de trabajo. Algunas estrategias utilizadas a lo largo del proceso serán relacionadas a continuación.

- Durante la fase exploración se realizan pruebas diagnósticas sencillas para identificar el estado de las competencias matemáticas desarrolladas hasta el momento.
- En la fase descriptiva del proyecto se empieza a evaluar las guías implementadas por la institución teniendo en cuenta criterios como: Desempeño de los estudiantes en pruebas y exámenes, diseño y estructura del material bibliográfico, criterio relación módulo-tiempo.
- Se implementa la utilización de un planeador de clase, en el cual se estructuran los temas a trabajar en cada sesión.
- Se hace uso de una bitácora en la cual se registra los temas trabajados en cada sesión, el tiempo utilizado para cada tema, y las fortalezas y debilidades evidenciadas en clase.

Las anteriores estrategias permitieron la estructuración del módulo de trabajo que se presenta como propuesta.

ÁREAS DEL CONOCIMIENTO QUE INVOLUCRA Y CONTENIDOS

Este proyecto se dirige a intervenir en el área de Educación matemática para la modalidad de educación no formal. Dada la delimitación del proyecto a la muestra de la población que se toma, el diseño de la guía de trabajo se plantea para el nivel de Ciclo V, análogo al grado décimo en la modalidad de educación formal, por tanto los núcleos temáticos y las competencia que se desarrollan en este proyecto están relacionadas con:

- Trigonometría
  - Razones trigonométricas
  - Funciones Trigonométricas
  - Aplicación de las Funciones trigonométricas.
- Geometría Analítica
  - Lugares geométricos.
  - Línea recta y función lineal.
  - Secciones cónicas.

PLANIFICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES A REALIZAR.

A partir del año 2015 cuando se da la vinculación a trabajar con el instituto de validación Cencov y luego de identificar los puntos problemáticos en los procesos, se realizaron una serie de actividades que permiten dar sustento y base al proyecto, las actividades serán relacionadas a continuación:

- Observación de la población.
- Observación y evaluación de las guías de trabajo implementadas por el instituto.
- Se describe el impacto que tiene los módulos de trabajo en la población.

- Revisión de las competencias propuestas para el área de matemáticas por el MEN y además, se hace una revisión a los formatos de evaluación de las pruebas estandarizadas y a su marco teórico.
- Se establece el estado del arte haciendo una revisión de los documentos pertenecientes al marco teórico y dando un vistazo a todos los modelos de educación no formal o a distancia que se han desarrollado en Colombia, Encontramos grandes estandartes para la alfabetización en Colombia como la educación por radio, la televisión educativa y los modelos de escuela nueva entre otros.
- Se inicia el diseño y construcción del módulo de trabajo para ciclo V.
- Redacción e informe final de la monografía de investigación.

POBLACIÓN BENEFICIARIA E IMPACTO

El proyecto “Educación Matemática para ciclos de validación y Educación para adultos” con su propuesta de diseñar un material bibliográfico impreso y/o digital pretende beneficiar inicialmente a los estudiantes inscritos en el nivel de ciclo Ven el instituto de validación Cencov con sede en Fusagasugá, optimizando y facilitando los procesos de enseñanza-aprendizaje. Más adelante se espera, que con la continuidad de esta línea de investigación la población beneficiaria pueda aumentar ya que este tipo de material producido puede ser dirigida a todos aquellos deseen complementar sus conocimientos, así mismo, se puede aumentar los niveles de población beneficiaria con la producción de guías desarrolladas en otras áreas del conocimiento y en otros niveles de formación.

Por parte del equipo de trabajo, se espera que el proyecto desarrollado tenga un impacto positivo a nivel académico y que desde la academia se preste más atención a la modalidad de educación no formal y cada uno de los procesos que allí se desarrollan. Inicialmente, se pretende abrir una nueva puerta de trabajo para el desarrollo de las prácticas docentes en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Cundinamarca y que desde allí se empiecen a desarrollar procesos de investigación basados en Educación Matemática para población adulta, poblaciones vulnerables, Educación matemática en el sistema carcelario, etc.

En resumen, este proyecto invita a todos los futuros licenciados en Matemáticas a pensar la educación matemática y su transversalidad a los diferentes entes sociales, y a tomar medidas para mejorar cada uno de los procesos que se desarrollan en la educación en el aspecto social.

RECURSOS (HUMANOS, FÍSICOS, INSTITUCIONALES, TÉCNICOS) Y MATERIALES.

Para el desarrollo de este proyecto de investigación se hizo necesario la utilización de una serie de recursos que serán relacionados a continuación.

- Recursos Humanos: Los recursos humanos con los que se contó para el proyecto fueron fundamentalmente la población de estudiantes inscritos al instituto de validación por ciclos Cencov, las directivas del instituto quienes apoyaron los procesos, y los docentes investigadores Miryam Rubyerlin Vásquez Sanabria y Leonel Castillo García.
- Recursos Físicos: los recursos físicos iniciales fueron los módulos de trabajo implementados por el instituto.

- Recursos Institucionales: el instituto de Validación Cencov sede Fusagasugá brindó sus instalaciones en la cuales se contaron con herramientas como aulas de clase, pupitres, tableros y medios audiovisuales.

PROCESO DE EVALUACIÓN Y SEGUIMIENTO.

Es importante dejar en claro que este proyecto se desarrolla desde una perspectiva de investigación proyectiva, por lo cual nuestro propósito es contribuir a mejorar los procesos educativos por medio del diseño de un material bibliográfico que puede ser accesible en formato impreso y/o digital.

En las diferentes fases del proyecto se realizaron procesos de evaluación constante sobre los módulos de trabajo ofrecidos por la institución, y de los resultados obtenidos en estas evaluaciones y con ayuda de las herramientas metodológicas se logra el diseño de un módulo de trabajo para ciclo V propuesto por "Educación Matemática para ciclos de validación y Educación para adultos". Por lo anterior se resalta lo siguiente:

El diseño y construcción del Módulo de trabajo para ciclo V es el resultado de un proceso de evaluación sobre los anteriores módulos implementados por la institución, nuestro objetivo es el diseño de dicho módulo, por lo tanto, la implementación y posterior evaluación del módulo para ciclo V no se realizará; sin embargo, se deja la posibilidad para quienes estén interesados en continuar el proyecto o realizar la implementación lo hagan siempre y cuando se mantenga la relación del material con derechos de autor.

EVIDENCIA BITACORA DE CLASES

	FECHA	HORA DE LLEGADA	TEMA	ACTIVIDAD	HORA DE SALIDA	FIRMA
1	18/Marzo/2017	7:00 AM	Ángulos, Razones Trigonométricas	A las 7:00 Am Se inicia la clase dando una		
2				introducción sobre Angulos y su clasificación		
3				luego Iniciamos el núcleo de trigonometría	1:00 PM	
4				definiendo las razones trigonométricas. y		
5				Se deja como trabajo unos ejercicios de la		
6				guia. Evaluación Próxima clase.		
7	25/Marzo/2017	7:00 AM	Trigonometría	Se repasan las razones trigonométricas	1:00PM	
8				y Se aclaran dudas, luego iniciamos el		
9				tema de funciones trigonométricas y realizamos		
10				las gráficas, Por último se deja un taller		
11				Para la próxima clase. Tambien vimos el		
12				tema de Identidades trigonométricas.		
13						
14	01/Abril/2017	7:00AM	Geometría Analítica.	Se desarrolla un taller de repaso. Se		
15				Inicia el estudio analítico de una recta	1:00PM	
16				y Circunferencia. dando las Ecuaciones		
17				de distancia, Punto medio y Pendiente.		
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						

FECHA	HORA DE LLEGADA	TEMA	ACTIVIDAD	HORA DE SALIDA	FIRMA
/Marzo/2017	1:00PM	Ángulos, Razones Trigonométricas	Se inicia la clase con una introducción Sobre		
			ángulos y clasificación de Ángulos, luego		
			Se inicia el núcleo temático de Trigonometría	7:00PM	
			definiendo y Construyendo las razones		
			trigonométricas y sus propiedades.		
Marzo/2017	1:00PM	funciones Trigonométricas.	Se repasa y se aclara dudas sobre	7:00PM	
			razones trigonométricas, luego se		
			trabaja sobre funciones trigonométricas		
			y Se hacen las gráficas. Se desarrolla		
			también identidades trigonométricas		
			y Solución de triángulos oblicuangulos		
Abril/2017	1:00PM	Geometría Analítica	Se realiza la Evaluación, ~~Se~~ revisa		
			el taller. Iniciamos el tema de Geometría	7:00PM	
			analitica. definiendo las ecuaciones de		
			distancia, punto medio, pendiente y		
			finalizamos hablando Sobre ecuaciones		
			de recta y Circunferencia		

	FECHA	HORA DE LLEGADA	TEMA	ACTIVIDAD	HORA DE SALIDA	FIRMA
1	21/Marzo/2017	8:00 AM	Ángulos, Clasificación de Ángulos	Se inicia la clase estableciendo las normas		
2				dentro de clase, después se inicia el tema	10:00 AM	
3				Sobre ángulos, luego damos inicio a la		
4				clasificación de ángulos. Se dejan ejercicios		
5	22/Marzo/2017	8:00 AM	Clasificación de Ángulos	Continuamos el tema Sobre clasificación		
6				de Ángulos, y también vimos el	10:00AM	
7				teorema de Thales sobre proporcionalidad		
8	23/Marzo/2017	8:00 AM	Teorema de Pitágoras, Razones	Aclaramos dudas Sobre Teorema de Thales.	10:00AM	
9			Trigonométricas.	damos a conocer el Teorema de Pitágoras		
10				y luego iniciamos el Núcleo de Trigonometría		
11				definiendo las 6 razones trigonométricas.		
12	24/Marzo/2017	8:00AM	Razones Trigonométricas.	Se aclaran dudas. Se presentan ejemplos	10:00AM	
13				Se hace Evaluación		
14	27/Marzo/2017	8:00AM	Funciones Trigonométricas	Iniciamos el tema de funciones		
15				trigonométricas y realizamos las gráficas	10:00AM	
16				de Seno y Coseno		
17	28/Marzo/2017	8:00AM.	Funciones Trigonométricas.	Repasamos sobre funciones trigonométricas.		
18				e iniciamos sobre identidades trigonométricas	10:00AM	
19	29/Marzo/2017	8:00AM	Identidades Trigonométricas	Realizamos la demostración de Identidades		
20				trigonométricas, se realiza taller	10:00 AM	
21						
22	30/Marzo/2017	8:00AM	Ley de Seno y Coseno.	Se enuncian las leyes de Seno y Coseno		
23				y se inicia la resolución de triángulos	10:00AM	
24				oblicuángulos. Se desarrollan ejercicios		
25						

	FECHA	LLEGADA	TEMA	ACTIVIDAD	HORA DE SALIDA	FIRMA
1	31/Marzo/2017	8:00AM	Solución de Triángulos	Se aclaran dudas sobre la utilización de la		
2				ley del Seno y ley del Coseno. Se realiza	10:00AM	
3				Evaluación.		
4						
5	3/Abril/2017	8:00AM	Ángulos Dobles, Suma y	Se determinan las razones trigonométricas		
6			Diferencia de Ángulos	para Suma y diferencia de Ángulos.	10:00PM	
7	4/Abril/2017	8:00AM	Estudio de la Recta.	Se da una introducción a la geometría		
8				analítica definiendo los Conceptos de		
9				distancia. Iniciamos el Estudio analítico		
10				de la recta para lo cual vimos las ecuaciones	10:00AM	
11				de pendiente de Recta, forma general y		
12				Canónica de las Ecuaciones.		
13	05/Abril/2017	8:00AM	Ecuaciones de Recta.	Se aclaran dudas sobre Ecuaciones de	10:00AM	
14				Recta y se propone un taller a realizar.		
15						
16	06/Abril/2017	8:00 AM	Secciones Cónicas.	Se desarrolla el estudio analítico de		
17				algunas secciones cónicas como circunferencia	10:00AM	
18				elipse, parábola.		
19						
20						
21						
22						
23						
24						

FECHA	HORA DE LLEGADA	TEMA	ACTIVIDAD	HORA DE SALIDA	FIRMA
/Marzo/2017	6:00PM	Ángulos. Clasificación de Ángulos	Se hace la presentación del Curso y se da inicio al tema de Ángulos, se explica la Orientación Positiva de un ángulo, luego se trabaja sobre clasificación de Ángulos	8:00PM	
/Marzo/2017	6:00 PM	Clasificación de Ángulos.	Se inicia aclarando dudas de la tarea y continuamos el tema sobre clasificación de Ángulos.	8:00PM	
/Marzo/2017	6:00PM	Trigonometría.	Se enuncian los teoremas de Thales y el teorema de Pitágoras y luego se da una introducción a la trigonometría definiendo las razones trigonométricas para un Ángulo Agudo.	8:00PM	
/Marzo/2017	6:00PM.	Trigonometría	Se aclaran dudas Sobre el tema. Se hace un repaso sobre las razones trigonométricas y luego se realiza una evaluación.	8:00PM	
/Marzo/2017	6:00PM	funciones Trigonométricas.	Se define que es una función, vemos ejemplos de funciones trigonométricas y realizamos las gráficas de las funciones.	8:00PM	
/Marzo/2017	6:00PM	Identidades Trigonométricas.	Definimos las identidades trigonométricas fundamentales y a partir de ellas utilizamos el procedimiento para demostrar Identidades.	8:00PM	
Marzo/2017	6:00PM	Identidades Trigonométricas.	Se desarrolla un taller sobre identidades trigonométricas.	8:00PM	

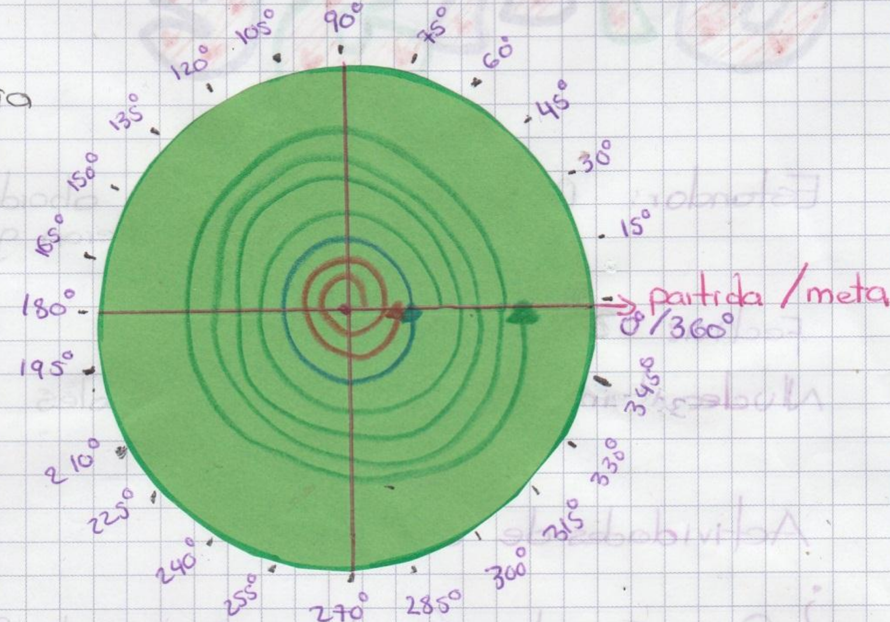
NOMBRE DEL PROFESOR Leonel Estiben Castillo García HORARIO 6:00-8:00Pm ASIGNATURA Trigonometría.

FECHA	HORA DE LLEGADA	TEMA	ACTIVIDAD	HORA DE SALIDA	FIRMA
30/Marzo/2017	6:00PM	Solución de Triángulos oblicuangulos.	Se desarrollan ley de Seno y ley de Coseno para la Solución de triángulos oblicuangulos.	8:00PM.	
31/Marzo/2017	6:00PM	Solución de Triángulos	Se hace un repaso de los temas de la Semana, incluyendo ejercicios para luego desarrollar la evaluación.	8:00PM	
03/Abril/2017.	6:00PM.	Seno de Angulos Dobles y para Suma y Diferencia.	Se definen las razones trigonométricas para la suma y diferencia de ángulos. Luego iniciamos la parte de geometría analítica, definiendo el concepto de distancia y la ecuación para calcularla.	8:00PM	
04/Abril/2017	6:00PM.	Geometría.	Se definen las Ecuaciones de distancia entre puntos y la Ecuación para determinar el punto medio. Se realizan ejercicios.	8:00PM	
05/Abril/2017	6:00 PM	Recta.	Se dan las Ecuaciones de Pendiente de una recta, Ecuación general y Canónica de la recta y se deja taller evaluación.	8:00PM	
06/Abril/2017	6:00PM	Recta.	Se realiza repaso sobre Características de las rectas, se desarrolla un taller y se Corrige una evaluación realizada	8:00PM	

PARTES DEL PLANEADOR DE CLASES

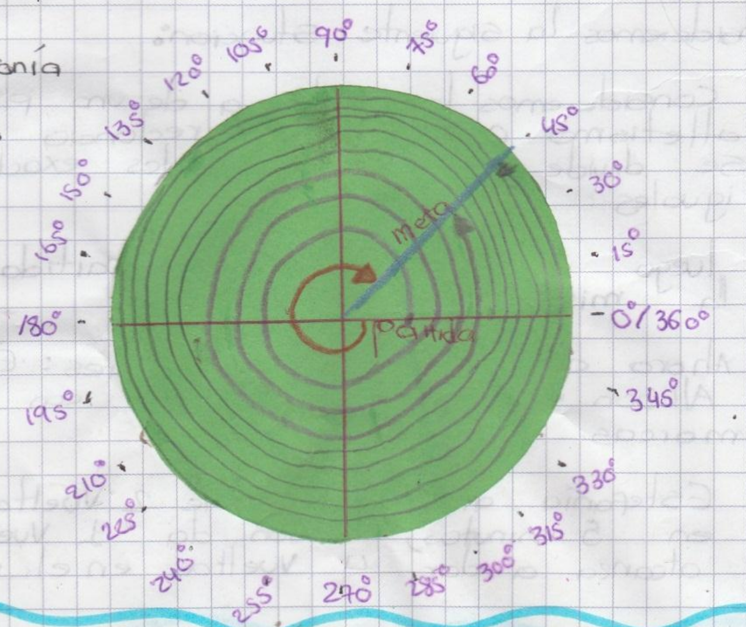
- Ahora dividamos la pista de atletismo en grados y observemos lo sucedido

Estefanía
Allison
Didier



¿Pero que sucede si el lado final o la meta no es la misma que el punto de partida?

Estefanía
Allison
DiDier



Clase 1

Estandar: Diseño estrategias para abordar Situaciones de medición que requieran grados de presición específicos.

Fecha: 23/02/2016

Nucleo temático: Àngulos coterminales

Actividades de desarrollo

¿Que son los Ángulos coterminales?

Dos ángulos se denominan coterminales, cuando tienen el mismo lado inicial y el mismo lado final.

Consideremos la siguiente situacion:

- Consideremos la existencia de una pista de atletismo perfectamente redonda la cual se divide en cuatro partes exactamente iguales
- luego fijemos la Linea de partida que será la misma meta
- Ahora consideremos 3 corredores: Estefanía, Allison y Didier cada uno con diferentes marcas.

Estefanía alcanza a darle 2 Vueltas a la pista en 5 minutos, Allisón da 1 Vuelta y Didier alcanza a dar 4 Vueltas en el mismo tiempo

Observemos que en la situación 1 los 3 corredores comenzaron en el mismo punto y terminaron en la misma meta, si medimos los ángulos barridos por cada corredor obtendremos lo siguiente

Estefanía → 2 Vueltas, como cada vuelta tiene 360° entonces Estefanía recorrió:

$$360° + 360° = 720°$$

Allison → 1 Vuelta = 360°

Didier → 4 Vueltas = 4 x 360° = 1440°

a estos 3 angulos se les llama ángulos coterminales porque tienen el mismo lado inicial y el mislo lado final

Notese que en la situación 2 el punto de partida y la meta no es el mismo y además uno de los corredores (estefania) corrió en sentido contrario al de sus compañeros pero al final todos tubrerón el mismo punto de partida y el mismo punto de llegada a si que sus angulos barridos tambien son coterminales

observemos los ángulos segun el número de vueltas

Estefanía → casi 1 vuelta → 45° - 360° = -315°
pero en sentido contrario

Allison → 3 Vueltas → 1125°

Didier → 5 Vueltas → 1845°

observamos que el ángulo de estefania es negativo, esto se da porque corrió en sentido contrario.

CLASE 3

Estandar:

Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.

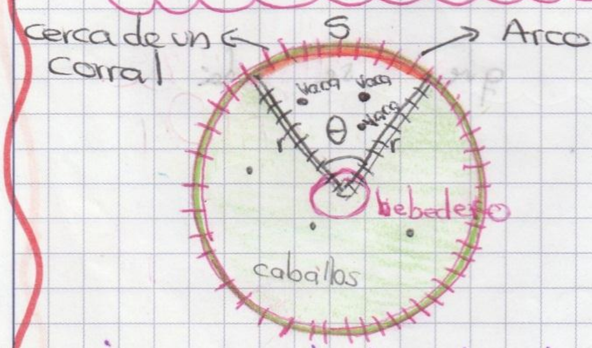
Fecha: 04/03/2016

Nucleo temático: Longitud de arco, área de un sector circular y clasificación de triangulos según sus lados y sus ángulos.

Actividades de desarrollo

Antes de dar inicio a la clase se presentará un corto video sobre el número π con el fin de afinzar conocimientos previos.

Longitud de Arco.



Recordemos que:

2π radianes → longitud de la circunferencia con radio r

θ → determina la longitud de S es un ángulo medido en Radiones

¿Cómo hallar la longitud de un arco?

$$S = \frac{\theta}{2\pi} \cdot (2\pi r)$$ → longitud de la circunferencia. (perimetro)

$$S = \frac{\theta}{\cancel{2\pi}} \cancel{2\pi} r \rightarrow S = \theta r$$

DD MM AA

La diferencia entre dos o más ángulos coterminales es el número de vueltas sobre el lado inicial

¿Como encontrár ángulos coterminales positivos y negativos a un ángulo dado?

Para encontrar ángulos coterminales positivos y negativos teniendo un angulo dado tenemos que sumar y restar $360° \rightarrow 1$ vuelta

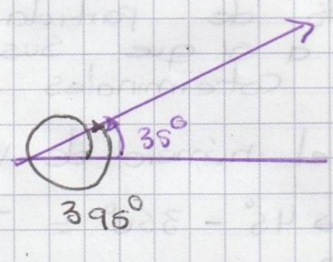
Ejemplo

Encuentra un ángulo positivo y negativo coterminal al un angulo de $35°$

Sol:

positivo

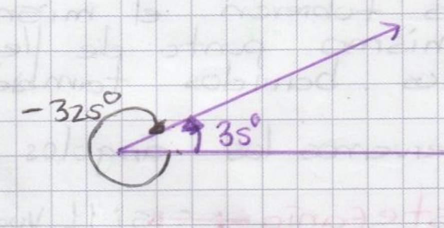
$35° + 360° = 395°$



$35°$ y $395°$ son angulos coterminales

Negativo

$35 - 360° = -325°$



$35°$ y $-325°$ son ángulos coterminales

Si llamamos n al numero de vueltas obtendriamos las siguientes expresiones

∡ Positivo → número de vueltas > 1

$\theta = 360°(n) + \alpha$

θ ↓ angulo

$360°$ ↓ lo que equivale a 1 vuelta

α ↓ ángulo Inicial dado (coterminal)

∡ Negativo

$\theta = -360°(n) + \alpha$

n ↓ mayor que 1

$$\frac{\frac{180^\circ \pi r}{5}}{\frac{\pi r}{1}} = \frac{180^\circ \cancel{\pi r}}{5 \cancel{\pi r}} = \frac{180^\circ}{5}$$

$$= 36^\circ \checkmark$$

Asignación de compromisos

Convierta de grados a radianes o de radianes a grados

- $135^\circ \rightarrow \frac{3}{4}\pi r$
- $\frac{3}{10}\pi r \Rightarrow 54^\circ$
- $\underline{3 \text{ rad}}$ No
- $\frac{2}{5}\pi r \Rightarrow 72^\circ$
- $316^\circ \rightarrow \frac{79}{45}\pi r$
- $10^\circ \; \frac{1}{18}\pi r$
- $127^\circ \rightarrow \frac{127}{180}\pi r$
- $210^\circ \rightarrow \frac{7}{6}\pi r$
- $\frac{1}{7}\pi r \; \frac{180^\circ}{7}$ ó $25^\circ 4$

Cibergrafía

You-tube → conversion de grados a radianes

wikipedia.org/El radian.

Observaciones.

Importante el manejo que se dá al concepto de radian.

DD MM AA

Clase 8

Estandar: Describo y resuelvo problemas del mundo real usando las funciones trigonométricas ~~e~~ implementando el uso de la calculadora

Fecha: 02/04/2016

Núcleo Temático. Uso de la calculadora y ejercicios de aplicación.

Actividades de desarrollo.

- Uso de la Calculadora.

Para esta actividad, se realizarán unas diapositivas como parte de un tutorial del uso y manejo de la calculadora.

Las teclas para calcular las funciones trigonométricas en la Calculadora Son:

Sin   Cos   Tan

NOTA: Hay que tener en cuenta si se va a trabajar con el angulo en radianes o en grados

Ajustar la calculadora en radianes	Agustar la calculadora en grados.
$\boxed{\text{Mode}}$ 2 veces → RAD	$\boxed{\text{Mode}}$ → 2 veces ↓ luego Deg

DD MM AA

Comprende el pedaso de pizza de Jamón y panceta

Solución

Datos

$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

$\theta = 45°$

$D = 36cm$

Entonces al convertir 45° a radianes obtenemos:

$\pi r \longrightarrow 180°$ $\quad X = \frac{\pi r}{4}$

$X \longleftarrow 45°$

como $r = \frac{D}{2}$ entonces $r = 18cm$, Remplazando los datos en la Fórmula obtenemos

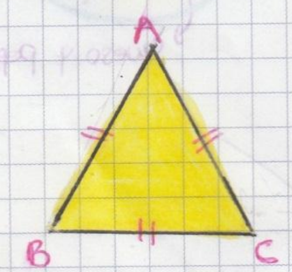
$A = \frac{1}{2} (18cm)^2 (\frac{\pi r}{4})$

$A = \frac{1}{2} (324cm^2) \frac{\pi r}{4}$

$A = 162cm^2 \frac{\pi r}{4} \longrightarrow A = 40,5\pi cm^2$ ó $\frac{81}{2} \pi cm^2$

Clasificación de triangulos

Los triangulos se clasifican según la longitud de sus lados como:



Equilátero

Todos sus lados tienen la misma medida

Ejemplo: determinar la longitud de arco que tiene un ángulo central de $15°$ con un radio de 2cm

Solución

I) como el ∡ debe estar dado en radianes, hacemos la correspondiente conversion

$180° \rightarrow \pi r$
$15° \rightarrow x$
$\Rightarrow \dfrac{15 \cdot \pi r}{180}$ simplificando

$\dfrac{1}{12}\pi r$

II) usamos la formula:

$S = \Theta r \longrightarrow S = \left(\dfrac{1}{12}\pi r\right)(2\,cm)$

$S = \dfrac{1}{6}\pi\, cm$ ✓

Área de sector circular

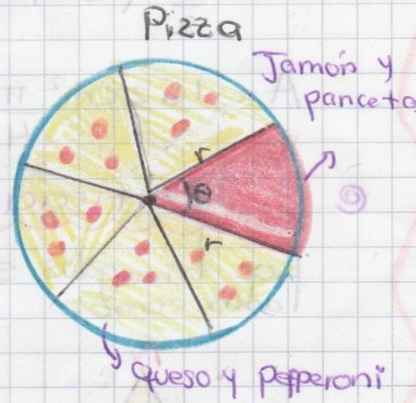
Θ = angulo central medido en radiones

r = radio

llamaremos A a el área del sector circular subtendido por Θ

Entonces:

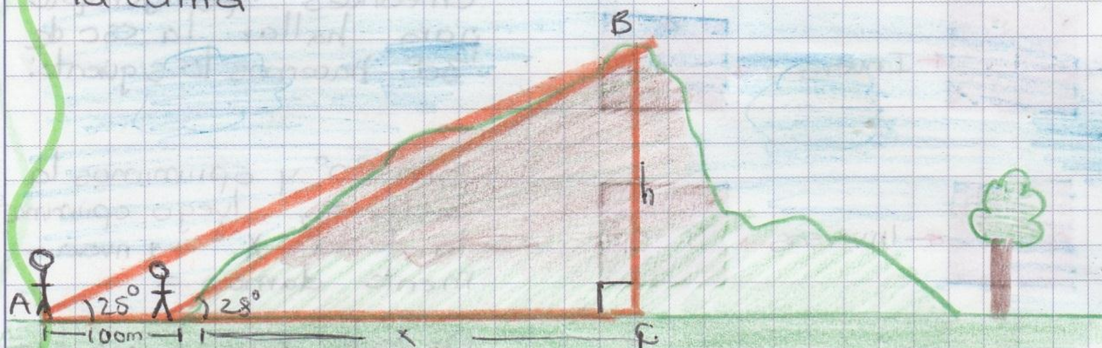
$$A = \frac{1}{2} r^2 \Theta$$



Ejemplo

La pizza tiene 36 cm de diametro y por promoción cambiaron uno de los pedasos por uno de Jamon y Panceta que cubra un ángulo de $45°$. Se quiere saber que area

Dos personas estan separadas 100m entre si y observan al mismo tiempo la cima de una colina como se observa en el diagrama. Hallar la altura de la colina



Se pueden obserbar 2 triangulos rectángulos el ACB y el DCB

para el triangulo ACB se tiene

$\tan 25^\circ = \dfrac{h}{100+x}$ Despejando h

$h = (100+x)\tan 25^\circ$ (1)

Para el triangulo DCB se tiene

$\tan 28^\circ = \dfrac{h}{x}$ despejando h

$h = x\tan 28^\circ$ (2)

Igualando (1) y (2)

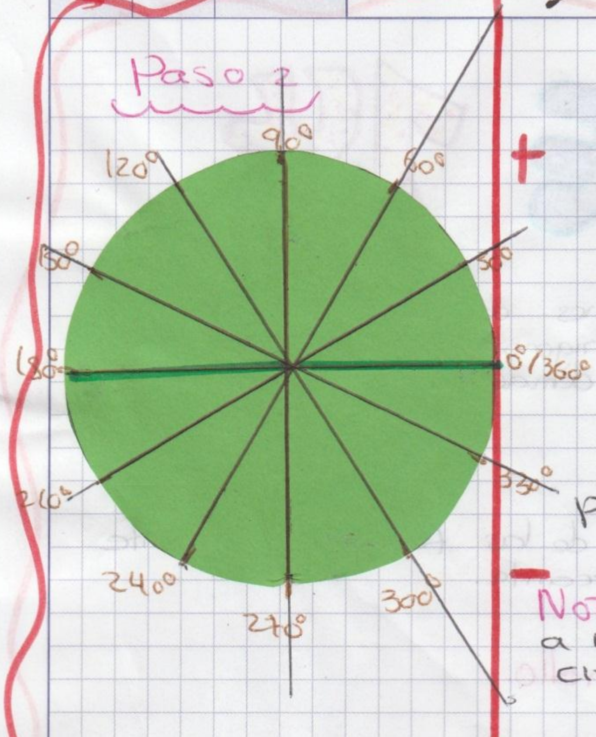
$(100+x)\tan 25^\circ = x\tan 28^\circ$

$100\tan 25^\circ + x\tan 25 = x\tan 28^\circ$ Despejando X

$x\tan 25^\circ - x\tan 28^\circ = -100\tan 25^\circ$

$x(\tan 25^\circ - \tan 28^\circ) = -100\tan 25^\circ$

Paso 2



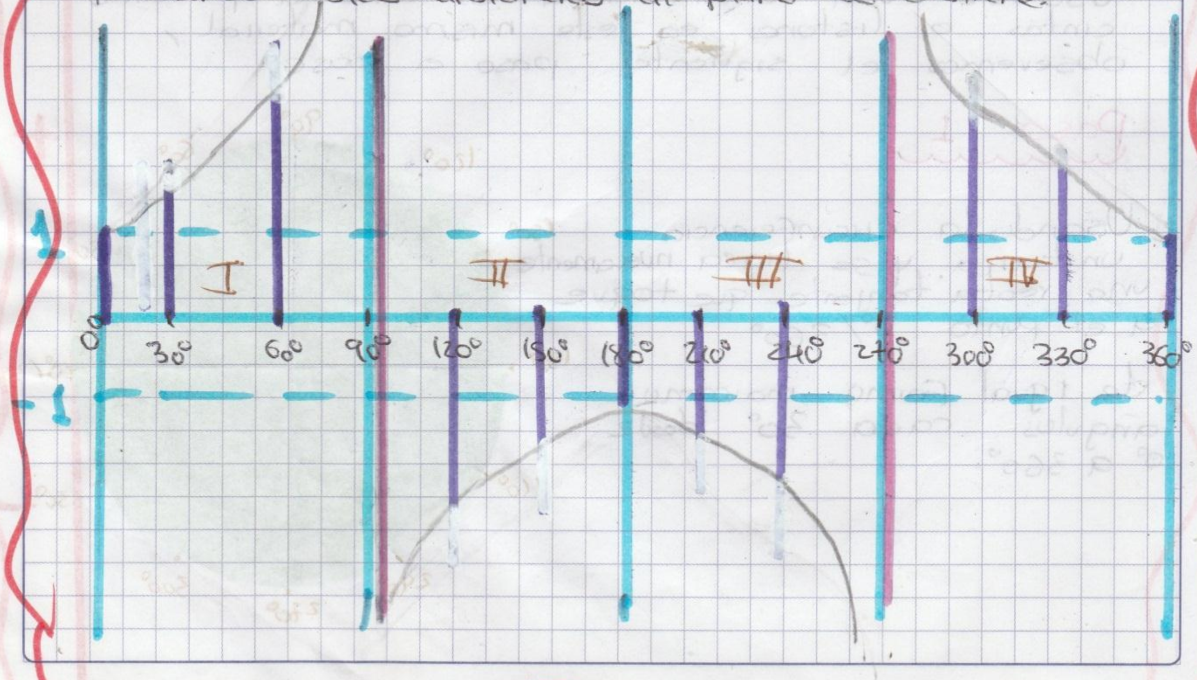
Para cada angulo se trazan rectas que van desde el origen, pasan por el ángulo deseado y además deben tocar la recta tangente.

Una vez hecho esto con las cintas de cartulina se miden las longitudes de cada recta trazada para cada ángulo y estas son las distancias que pondremos en nuestro plano.

NOTA: los distancias se empiezan a medir desde el centro de la circunferencia.

Paso 3

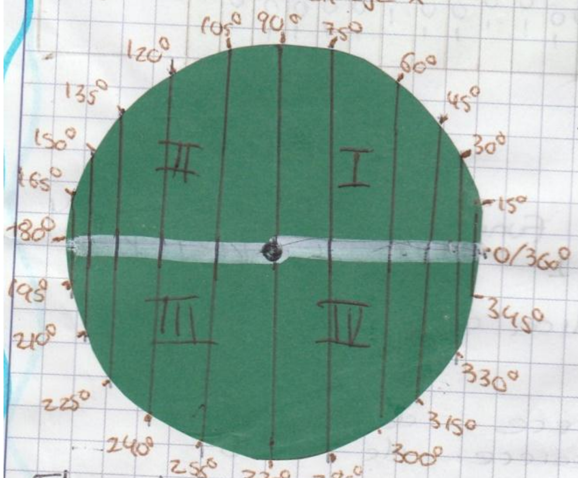
Pasando estas distancias al plano se obtiene.



- En cuanto al proceso de la circunferencia ya no se toman las distancias verticales sino las horizontales paralelas al eje X o en su defecto se rota la circunferencia usada en la gráfica de la función Seno pero se rota 90° y de esta manera sí se toman las distancias verticales. Observemos los dos casos.

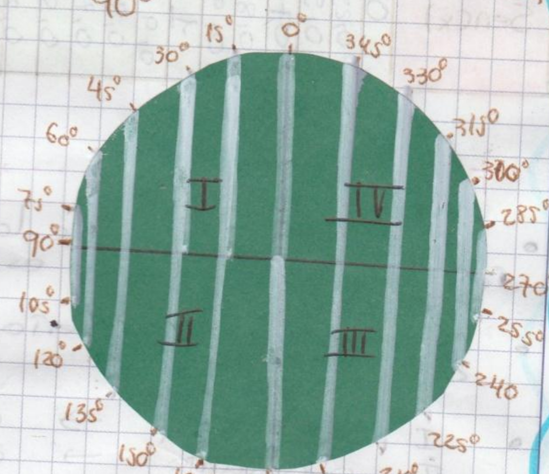
Caso 1

Tomando las distancias perpendiculares al eje X

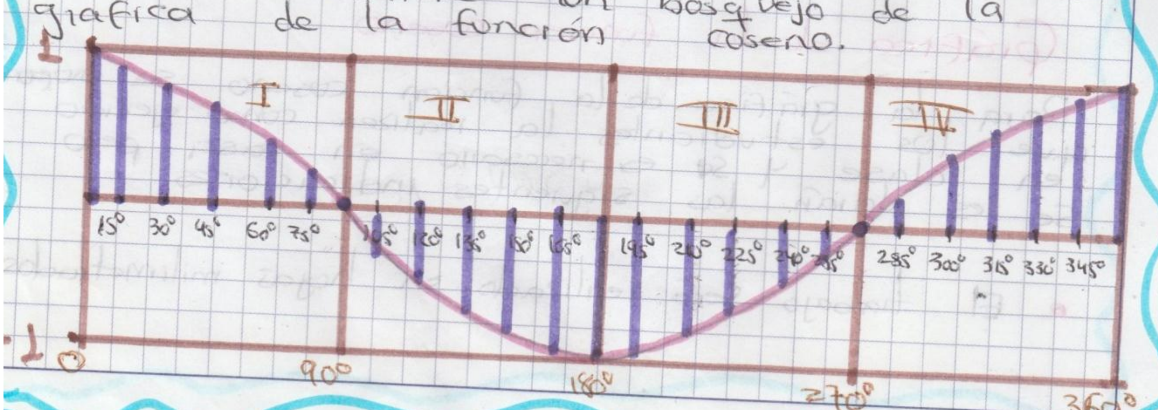


Caso 2

Rotando la circunferencia 90°

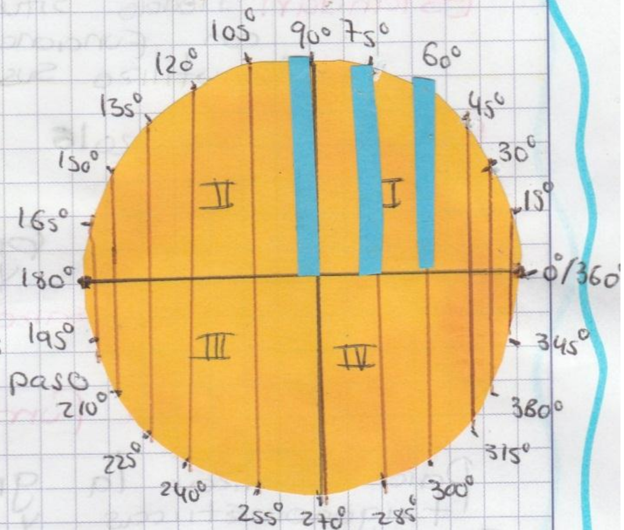


El resto del procedimiento es exactamente igual, se toma la medida de estas distancias, ya sea con cintas de cartulina o papel y se pasan a un plano igual al anterior, de esta forma se obtiene un bosquejo de la gráfica de la función coseno.



paso 2

Se trazan las lineas veiticales de hay desde el punto donde se ubica cada angulo hasta el eje X

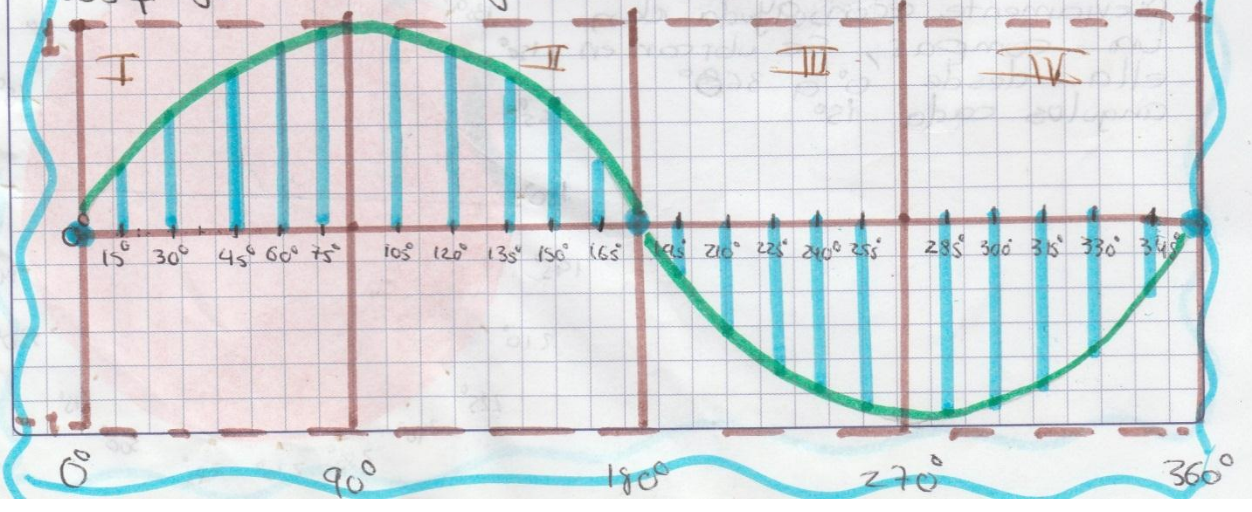


Paso 3

Usando cintas de cartulina de medir estas distancias (las previamente medidas en el paso 2)

Paso 4

Se dibuja un plano en donde sobre el eje X se ubiquen los angulos marcados en la circunferencia y se procede a pasar las respectivas distancias. Esto nos dá un bosquejo de la gráfica de la función seno



Clase 12

Estandar: Modelo situaciones de variación periodica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas

Fecha: 29/04/ 2016

Nucleo temático: Gráfica de la función Seno y coseno

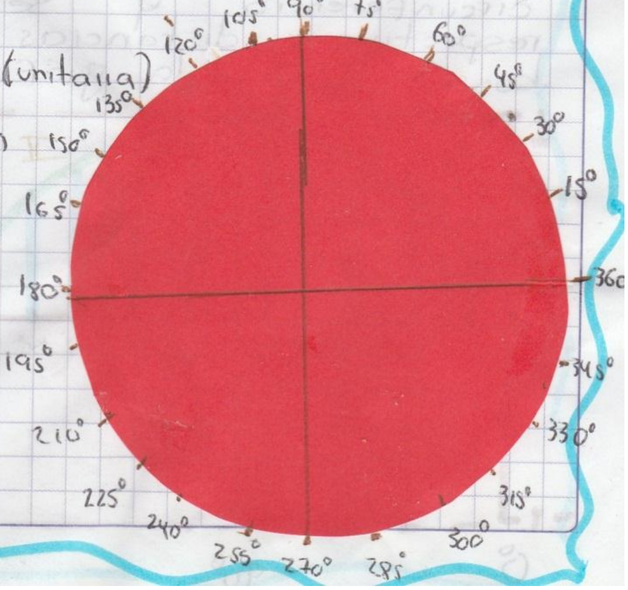
Actividades de desarrollo.

Gráfica de la funcion seno.

Para realizar la gráfica de las funciones trigonométricas y en este caso la de la función seno; se realizara usando material educativo como cartulina y marcadores de colores. observemos la siguiente secuencia de pasos. (esta actividad será elaborada en el tablero)

Paso 1

Usando una circunferencia (unitaria) previamente elaborada con un compas, se ubican en ella desde 0° a 360° angulos cada 15°



CLASE 10

Estandar: justifico resultados obtenidos mediante procesos de resolución de triangulos usando diferentes tecnicas.

Fecha: 12/04/2016

Nucleo Temático: Solución de triangulos oblicuagulos ley del seno

Actividades de desarrollo

Solución de triangulos oblicuángulos

Un triangulo oblicuángulo es aquel que tiene tres ángulos agudos o dos ángulos agudos y un ángulo obtuso.

Casos

Caso 1 Se conoce un lado y dos ángulos (LAA o ALA)

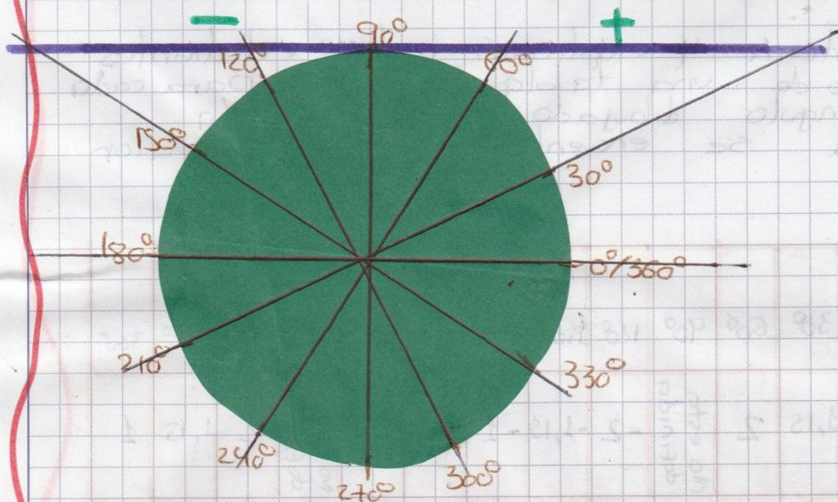
Caso 2 Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA)

Caso 3 Se conocen los tres lados del triangulo

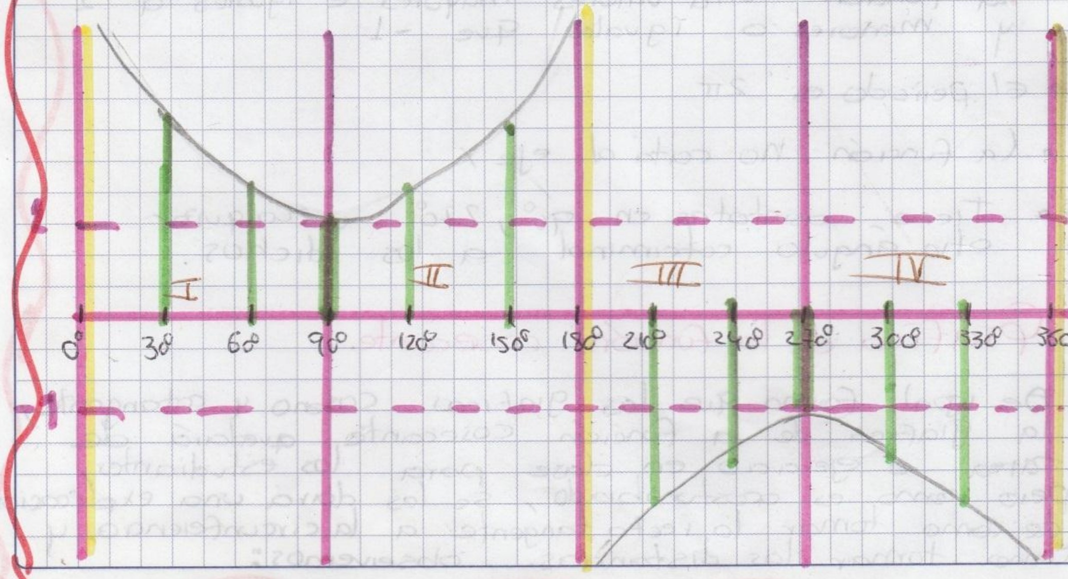
Caso 4 Se conocen dos lados del triangulo y el angulo comprendido entre ellos (LAL)

* Para hacer más clara esta temática se elaborarán pequeños carteles con dibujos para facilitar por medio de medios visuales la comprensión de cada caso.

* para realizar la gráfica de la función cosecante. Se debe trazar una recta tangente al punto donde se ubicó el angulo de 90° y de igual forma las distancias son medidas desde el centro hasta el punto de cote con la recta tangente de cada angulo. Y finalmente se trasladan estas distancias a el plano.



Ahora procedemos a a pasar las distancias a el plano



MÓDULO DE TRABAJO PARA CICLO V DE VALIDACIÓN PARA EL ÁREA DE MATEMÁTICAS, DISEÑADO POR "EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA CICLOS DE VALIDACIÓN Y EDUCACIÓN PARA ADULTOS

MATEMÁTICAS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA CICLOS DE VALIDACIÓN Y EDUCACIÓN PARA ADULTOS

Módulo de Trabajo Ciclo V

Miryam Rubyerlin Vásquez Sanabria
Leonel Estiben Castillo García

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

Universidad de Cundinamarca
Facultad de Educación, Departamento de Licenciatura en Matemáticas
Fusagasugá, Colombia
2017

Módulo de Trabajo Ciclo V

Miryam Rubyerlin Vásquez Sanabria
Leonel Estiben Castillo García

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

Asesora:
Magíster Martha Lidia Barreto

Universidad de Cundinamarca
Facultad de Educación, Departamento de Licenciatura en Matemáticas
Fusagasugá, Colombia
2017

Índice general

LOGROS:

* Comprende loas propiedades de funciones de variable real y las aplica adecuadamente.
* Resuelve problemas que involucran funciones de variable real.
* Interpreta gráficas de funciones de variable real.
* Utiliza tablas, gráficas y fórmulas para resolver problemas.

Capítulo 1

Funciones

El concepto de función surge en el sigo XVII con la necesidad de expresar leyes naturales utilizando relaciones matamáticas, esto sucede inicialmente con Galileo Galile con el descubrimiento de la ley de los cuerpos pesados, sin embargo, años después Isaac Newton promivió la utilización de funciones.

Las funciones surgen de la propia fisica y su necesidad de interpretar fenómenos físicos y no de las matemáticas, utilizando las funciones más en la intuición que en una definición más rigurosa. A fin ales del siglo XIX las funciones encuentran su fundamento y representación gráfica matemática.

1.1. PRODUCTO CARTESIANO

El producto cartesiano entre dos conjuntos M y N es el conjunto de todas las parejas ordenadas donde la primera componente corresponde al conjunto M y la segunda componente al conjunto N, escrito como $M \times N$, es decir $M \times N = \{(m,n) | m \in M \wedge n \in N\}$

Ejemplo:
Cuál es la respuesta correcta para el producto cartesiano $(M \times N)$, entre $M = \{m,n,o\}$ y $N = \{1,2\}$.

A) $M \times N = \{(n,1),(n,3)\}$

B)$M \times N = \{(m,1),(m,3)\}$

C)$M \times N = \{(o,1),(o,3)\}$

D) $M \times N = \{(n,1),(n,2),(m,1),(m,2),(o,1),(o,2)\}$

Solución:

Primero, m con los elementos de N

$$M \times N = \{\underbrace{\underbrace{m,n,o\}\{1}, 2}\}$$

$$= \quad \{(m,1),(m,2)\}$$

Segundo, n con los elementos de N

$$M \times N = \{m,\underbrace{\underbrace{n,o\}\{1}, 2}\}$$

$$= \quad \{(n,1),(n,2)\}$$

Tercero, o con los elementos de N

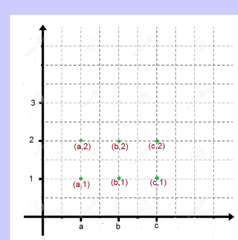
$$M \times N = \{m,n,\underbrace{\underbrace{o\}\{1}, 2}\} \quad = \quad \{(o,1),(o,2)\}$$

Por último, se unen todos los resultados obtenidos

$$M \times N = \{(m,1),(m,2),(n,1),(n,2),(o,1),(o,2)\}$$

Es decir, las respuesta correcta es **D)** $M \times N = \{(n,1),(n,2),(m,1),(m,2),(o,1),(o,2)\}$

Podemos evidenciar el producto cartesiano en el momento que ubicamos puntos en el plano, ya que utilizamos una pareja ordenada (x,y).



1.2. RELACIÓN

Una relaci'on (R) entre un conjunto M (conjunto de salida) en un conjunto N (conjunto de llegada), en un subconjunto de $M \times N$; es decir $R = \{(m,n)/m \in M \wedge n \in N\} \subseteq A \times B$

Ejemplo: De los conjuntos $M = \{m, n, o\}$ y $N = \{1, 2\}$ alguna de las relaciones que se pueden definir son:

$R_1 = \{(m,0),(m,1)\}$
$R_2 = \{(m,0),(m,1),(n,0)\}$
$R_3 = \{(n,0)\}$

1.2.1. Dominio y rango de una relación

Se llama *dominio* al conjunto formado mediante una relación definida por los elementos de un conjuto A en relación con al menos un elemento de un conjunto B, se denota ***Dom R***

Se llama *rango* al conjunto formado mediante una relación por los elementos de un conjunto B con al menos un elemento de un conjunto A, se denota ***Ran R***

Ejemplo: Para el conjunto $M = \{1, 2, 3, 4\}$ y el conjunto $N = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ se define la relación de M en N como $y = 2x$. Cual de las siguientes opciones corresponden al Dominio y al Rango de la relación.
A $Dom = \{2, 3, 4\}$ y $Ran\{4, 6, 8\}$
B $Dom = \{1, 7, 4\}$ y $Ran\{5, 6, 8\}$
C $Dom = \{2, 6, 7\}$ y $Ran\{4, 5, 6\}$
D $Dom = \{1, 3, 4\}$ y $Ran\{1, 6, 8\}$

Solución:

las parejas ordenadas que se pueden formar en total mediante el producto cartesiano es:

$M \times N = \{(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),$
$(1,8),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),$
$(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),(4,4),$
$(4,5),(4,6),(4,7),(4,8)\}$

Como la relación es $y = 2x$, las parejas que pertenecen a ésta son:
$R = \{(2,4),(3,6),(4,8)\}$ De esta forma, el dominio (las componentes en x) y el rango (las componentes en y) son:
$Dom \quad = \{2, 3, 4\}$
$Rang \quad = \{4, 6, 8\}$

Teniendo este resultado, la respuesta correcta es **A)** $Dom = \{2, 3, 4\}$ y $Ran\{4, 6, 8\}$

1.3. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

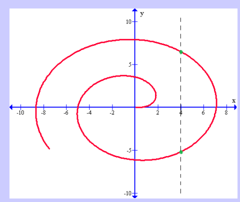
Una función es una relación definida entre un conjunto X (dominio) y los elementos de un conjunto Y(codominio), de tal manera que a cada elemento x del dominio le corresponde un único elemento $f(x)$ del codominio (o también llamado rango), se denota como $f : X \to Y$.

El conjunto de parejas que forman la función se expresa de la forma

$$f = \{(x, y)/ \underbrace{y = f(x)}_{y\ depende\ de\ x}\}$$

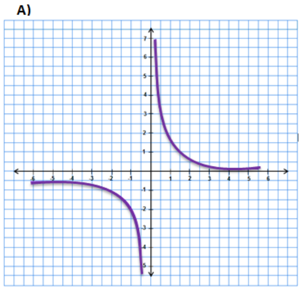
En un lenguaje más simple, una función matemática se puede relacionar con situaciones de la vida real, por ejemplo, el costo que se debe pagar al fotocopiar un documento, éste depende de la cantidad de hojas que contiene dicho documento o el costo de la factura de energia depende de la luz consumida dutante el mes facturado.

Si se traza una recta perpedicular al eje x y ésta intersecta a la gráfica en dos o más puntos, entonces la gráfica no corresponde a una función (x, y).

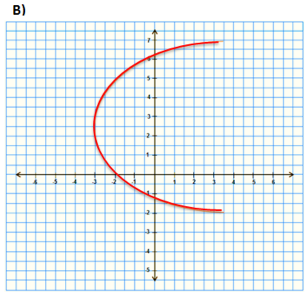


Ejemplo:
Cuál de las siguientes relaciones corresponden a una función y cuáles no.

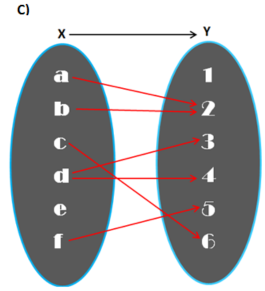
A)



B)



C)



Solución:
A) Es función, ya que ninguna recta vertical intercepta la gŕafica en más de un punto.

B)No es función, ya que si se traza una recta vertical intersectando la grafica, ésta toca en ḿas de un punto a la gráfica.

C) No es función, ya que el elemento d del conjunto X está asociado con dos elementos del conjunto Y, además todos los elementos del conjunto X no forman parte del dominio.

1.3.1. Representación de funciones

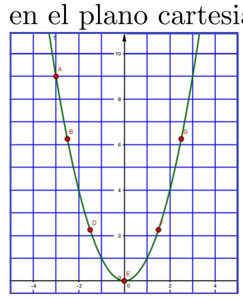
La representación de una función se obtiene al con número suficiente de parejas ordenadas para ello se puede representar mediante una tabla de valores, en ella se escribe los elementos de X (en una fila o columna) y los elementos de Y(en otra fila o columna).
En esta tabla se reemplaza los valores de x en la fórmula $y = f(x)$, obteniendo los valores corespondientes de y, estas parejas ordenadas permiten realizar un trazo aproximado de la función.

Ejemplo:
Representar la función $y = x^2$ utilizando la tabla de valores.

Solución

x	-3	-5/2	-1,5	0	3/2	2,5	4
y	9	25/4	2,25	0	9/4	6,25	16

Representación grafica de la función en el plano cartesiano



1.3.2. Dominio y Rango de una función

El dominio de una función es el conjunto de valores que toma la variable independiente x para calcular el valor de la variable dependiente y, este cálculo en un función es importante porque permite conocer dónde tiene sentido la función. Se denota de la forma Dom_f
El rango de una función es el conjunto formado por todos los valores que puede tomar la variable dependiente y; cuando x varía en el dominio de la función. Se denota Ran_f

Ejemplo:
Imagina que haces el lanzamiento de una paleta de forma vertical y que éstra tarda en el aire 12 segundos y nuevamente la atrapas. En este proceso considera la función determinada por el tiempo (la entrada) y la altura (la salida), el dominio para esta función es cada valor de tiempo que dura el lanzamiento, sin tener en cuenta el tiempo antes de que la pelota sea lanzada y el tiempo despés de que la atraparas, entonces el dominio es 0-12 seguntos ya que el tiempo transcurre continuamente durante este intervalo.
Ahora supongamos que la altura de tu mano del suelo cuando lanzas la pelota es de 1 metro y que la altura máxima que alcanza es 3 metros antes de que empezara a caer, entonces el rango es 1-3 metros ya que la altura cambia constantemente en este intervalo, no podemos escribir cada salida.

1.3.3. Propiedades de una función

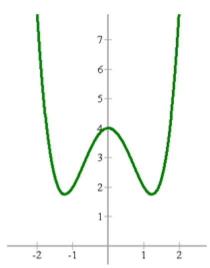
Funciones pares

Una función f es par si tiene simetría reflectiva a través del eje de las y. Es decir, se cumple $f(-x) = f(x)$

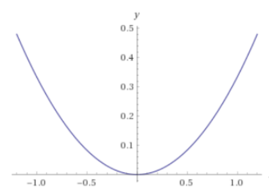
Ejemplo:

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$

$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 4 = x^4 - 3x^2 + 4 = f(x)$



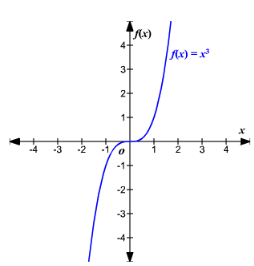
$f(x) = \frac{x^2}{3}$
Si se sustituye x por $-x$,
se obtine: $f(-x) = \frac{(-x)^2}{3}$
es igual a $\frac{x^2}{3} = f(x)$



Funciones impares

Una función f es impar si tiene simetría rotacional de 180º con respecto del origen. Es decir, se cumple $f(-x) = -f(x)$

Ejemplo:
$f(x) = x^3$
Si se sustituye x por $-x$, se obtine: $f(-x) = (-x)^3$ es igual a $-x^3 = -f(x)$



1.4. TALLER

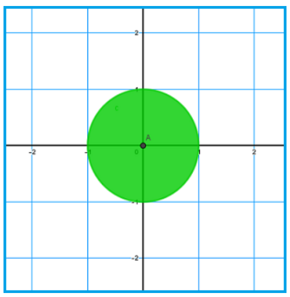
1. Sean los conjuntos $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $N = \{2, 4, 6, 8, 10\}$:

a. Determine el producto cartesiano

b. Hallar el dominio y el rango

c. Represente el producto cartesiano en el plano cartesiano.

2.La relacion correspondiente a la siguiente figura es:



a. $R = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$

b. $R = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 > 1\}$

c. $R = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = -1\}$

d. $R = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq -1\}$

3. Cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas

a. El dominio de una relación es el conjunto formado por los elementos de un conjunto B con al menos un elemento de un conjunto A.

b. Una función f un mismo elemento del dominio puede tener dos elementos del codominio distintos.

c. El dominio de una funci"on es el conjunto de valores que toma la variable independiente y permite calculra el valor de la variable dependiente.

d. No es posible evidenciar una función en el plano cartesiano.

De acuerdo a la siguiente información responda las preguntas 4 y 5:

Sean $M = \{1, 3, 4, 5\}y$ $N = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y R una relación de M en N tal que:
$R = \{(m, n)/m \in M, n \in N, m \geq n\}$

4. El dominio de la relacion R es:

a. B

b. $\{4, 5, 6\}$

c. $\{3, 4, 5\}$

d. A

5. El rango de la relación es:

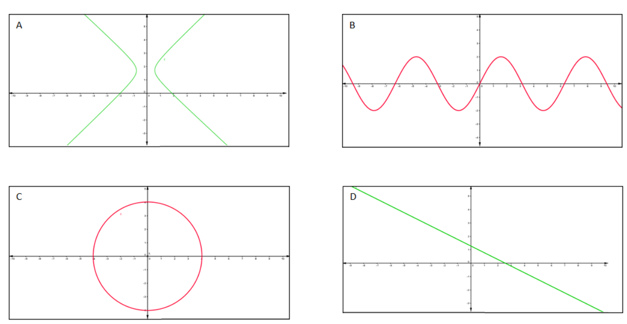
a. B

b. $\{4, 5\}$

c. $\{3, 4, 5\}$

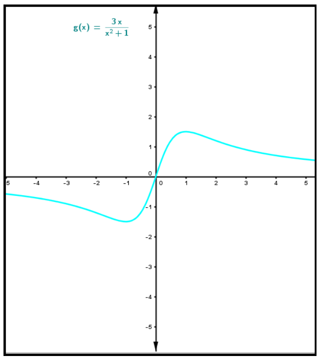
d. A

6. Cuál de las siguientes graficas corresponde a una función y cuáles no.

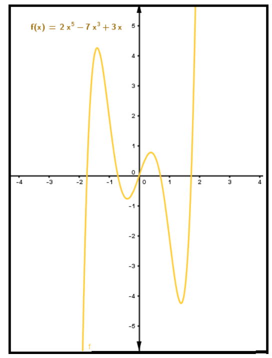


7. Determine cuál de las siguientes gráficas son funciones pares y cuales son funciones impares.

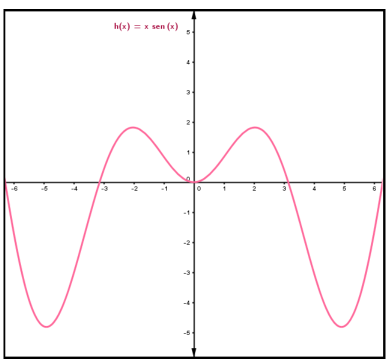
a. $\frac{3x}{x^2+1}$



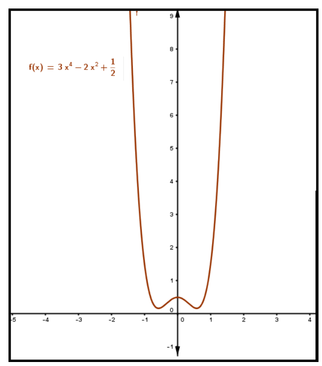
c. $2x^5 - 7x^3 + 3x$



b. $x\sin(x)$



d. $3x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}$



LOGROS:

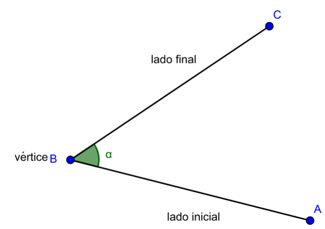
* Identifica y construye ángulos teniendo en cuenta su clasificación.
* Emplea los conceptos de grado y radián para realizar conversiones de medidas de ángulos.
* Identifica las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.
* Evalúa las funciones trigonométricas de ángulos notables.

Capítulo 2

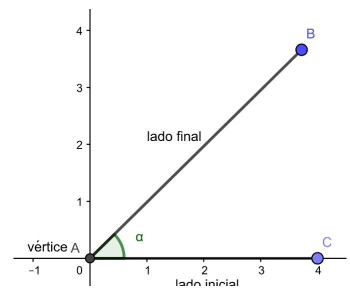
Razones Trigonométricas

2.1. ÁNGULOS

En trigonometría, un ángulo es el espacio comprendido entre la intesrcción de dos semirectas (**lados**) en un punto llamado **vértice**. La semirecta que permanece fija se denomina "lado inicial" y la semirecta que describe la rotación se denomina "lado final". Para nombrar un ángulo se puede utilizar una letra mayúscula anteponiendo el símbolo "$\sphericalangle$" o con una letra minúscula del alfabeto griego.



Un ángulo α se encuentra en posición normal o canónica, si al ser representado en un sistema de coordenadas cartesianas el vértice coincide con el origen del sistema y además su lado inicial se encuentra sobre el semieje positivo x.
En el sistema de coordenadas cartesianas se pueden distinguir cuatro cuadrantes dispuestos en sentido contrario a las manecillas del reloj.

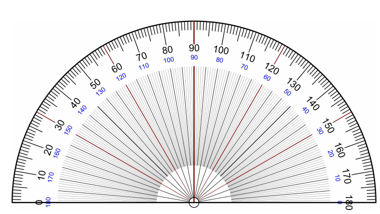


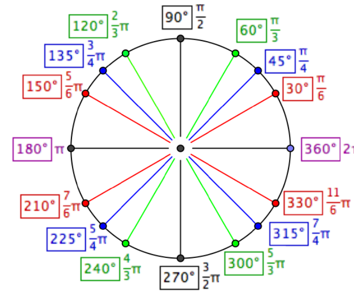
Medición de ángulos

Desde la antigüedad el hombre a realizado aproximaciones de la medida de ángulos con el fin de resolver problemas con triángulos rectángulos y realizar aplicaciones a la astronomía. Cuando un ángulo presenta una rotación en el sentido contrario de las manecillas del reloj se dice es un **ángulo positivo**; por el contrario, si el ángulo gira en el mismo sentido de las manecillas del reloj entonces se dice es un **ángulo negativo**

Medición de ángulos en el sistema sexagesimal

El sistema sexagesimal de medida, conocido como medición de ángulos en grados fue establecido por la antigua civilización egipcia. Actualmente, es la base del funcionamiento de dispositivos de posicionamiento global.
Un ángulo de giro completo se genera cuando el lado final rota sobre el vértice hasta coincidir con la posición del lado inicial. La medida de este ángulo es de 360° y se conoce como ángulo perigonal. Podemos referenciar que una circunferencia tiene un ángulo cuya rotación es de 360° con el fin de establecer más adelante la relación con el sistema de Radianes.





Medición de ángulos en el sistema cíclico o radianes

El sistema cíclico de medida de ángulos, relaciona la medida de un ángulo central α con vértice en el centro de una circunferencia de radio r y la longitud de un arco s que cubre una porción de la circunferencia. Cuando la longitud de arco sobre la circunferencia y el radio son iguales entonces se dice que $\alpha = 1rad$.

Más formamlmente se define como:

Un radián es la medida de un ángulo central de una circunferencia cuya longitud de arco es igual a su radio.

Relación entre grados y radianes

GRADOS	RADIANES
360°	2π rad
180°	π rad
90°	π/2 rad
60°	π/3 rad
45°	π/4 rad
30°	π/6 rad
57,3°	1 rad

Un ángulo de $360°$ equivale a 2π rad donde $\pi = 3,14159....$ Se puede determinar entonces la equivalencia entre grados y radianes de la siguiente manera:

$$360° = 2\pi rad$$

Se divide ambas partes de la igualdad

$$180° = \pi rad$$

Se divide entre $180°$

$$1° = \frac{\pi}{180} rad$$

Por lo tanto $1° \approx 0,01745$ rad De manera alterna, si se divide entre π la expresión $180° = \pi rad$ se tiene que 1 rad $\approx 57,29558°$

Ejemplos

Expresar $\frac{3\pi}{4}$ en grados
Solución:

$$\text{como 1 rad es } \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$$

$$\text{entonces} \quad \frac{3\pi}{4} \times \left(\frac{180}{\pi}\right)$$

$$\frac{540\pi}{4\pi} = 135^{\circ}$$

Expresar 315° en radianes
Solución:

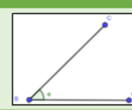
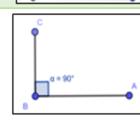
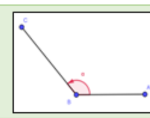
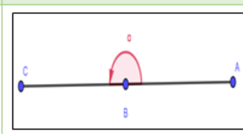
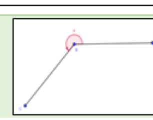
$$\text{Como} 1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$$

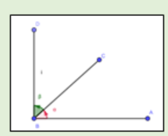
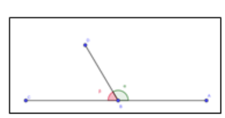
$$\text{entonces} \quad 315^{\circ} \times \left(\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\frac{315\pi}{180} = \frac{7\pi}{4}$$

Clasificación de ángulos

Los ángulos se clasifican de acuerdo a su medida y a la suma de sus medidas. Es importante reconocer los tipos de ángulo para la resolución de problemas en trigonomrtía. Los ángulos los podemos categorizar así:

CLASIFICACIÓN SEGÚN SU MEDIDA		
ANGULO AGUDO	Tiene una medida menor que 90°	
ANGULO RECTO	Tiene una medida igual a 90°	
ANGULO OBTUSO	Tiene una medida mayor que 90°	
ANGULO LLANO	Tiene una medida igual a 180°	
ANGULO OBLICUO	Es un ángulo que no es recto	

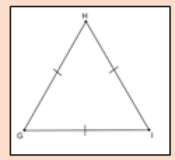
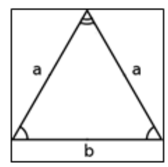
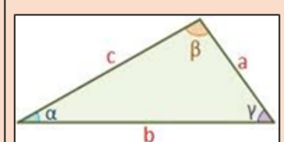
CLASIFICACIÓN SEGÚN LA SUMA DE SUS MEDIDAS		
ANGULO COMPLEMENTARIO	El ángulo α se dice que es complementario con el ángulo β, si $\alpha + \beta = 90°$	
ANGULO SUPLEMENTARIO	El ángulo α se dice suplementario con el ángulo β, si si $\alpha + \beta = 180°$	

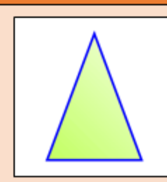
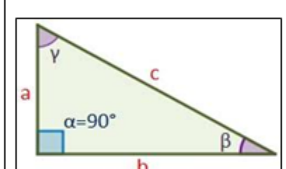
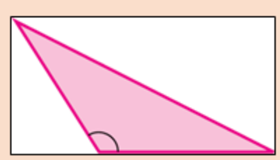
2.2. TRIÁNGULOS

Las principales aplicaciones de la trigonometría se basan en la resolución de triángulos, por lo cual es importante conocer la clasificación y algunas propiedades de los triángulos.

Clasificación de triángulos

Los triángulos se pueden clasificar de acuerdo a la medida de sus lado y la medida de sus ángulos.

CLASIFICACIÓN SEGÚN LA MEDIDA DE SUS LADOS		
TRIANGULO EQUILATERO	Todos sus lados tienen la misma medida	
TRIANGULO ISÓSCELES	Dos de sus lados tienen la misma medida	
TRIANGULO ESCALENO	Ninguno de sus lados tienen la misma medida	

CLASIFICACIÓN SEGÚN LA MEDIDA DE SUS ANGULOS		
TRIANGULO ACUTANGULO	Todos sus angulos internos son agudos	
TRIANGULO RECTANGULO	Tiene un angulo recto	
TRIANGULO OBTUSANGULO	Tiene un obtuso	

Propiedades de los Triángulos

Algunas propiedades importantes de los triángulos son:

- Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces, los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.
- Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces, los lados opuestos a éstos ángulos son congruentes.
- la suma de los ángulos internos de un triángulo debe ser igual a 180°
- Si dos triángulos tienen la misma base b y la misma altura h, entonces, las áreas de los triángulos son iguales.
- Un triángulo equilátero es un triángulo equiángulo.

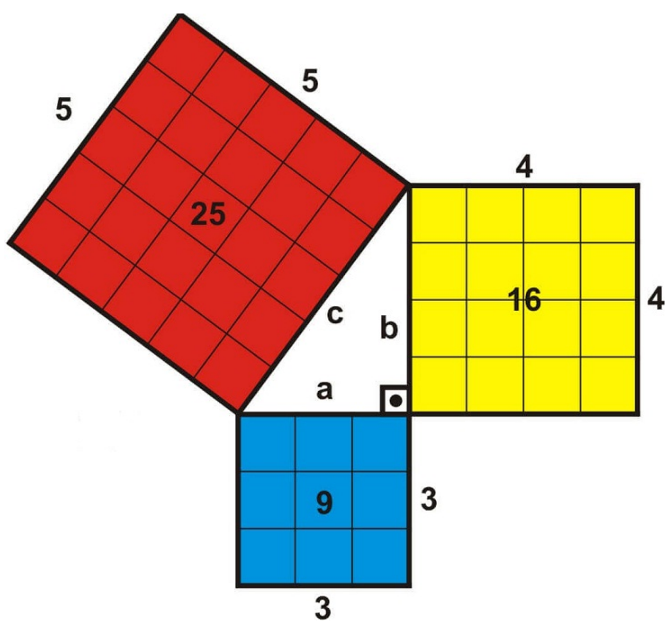
Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo al lado mas largo se le llama **hipotenusa** y los otros dos lados se les llama **catetos**.

El teorema de Pitágoras establece, "La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"

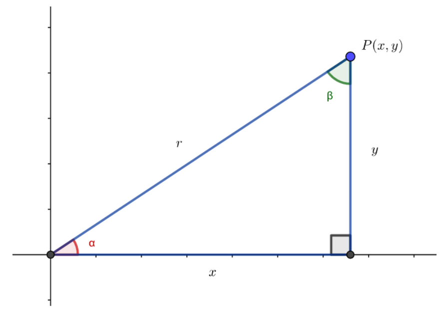
Para todo triángulo rectángulo se cumple que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



2.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Vamos a utilizar el siguiente triángulo rectángulo para definir las seis razones trigonométricas para un ángulo θ, donde r es la hipotenusa y x, y son los dos catetos



Con respecto al ángulo θ tenemos que el cateto opuesto mide "y" y el cateto adyacente mide "x". Las razones trigonométricas se definen como:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{cateto \quad opuesto}{hipotenusa} = \frac{y}{r} \qquad \csc\theta = \frac{hipotenusa}{cateto \quad opuesto} = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{cateto \quad adyacente}{hipotenusa} = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{hipotenusa}{cateto \quad ayacente} = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{cateto \quad opuesto}{cateto \quad adyacente} = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{cateto \quad adyacente}{cateto \quad opuesto} = \frac{x}{y}$$

Ejemplos

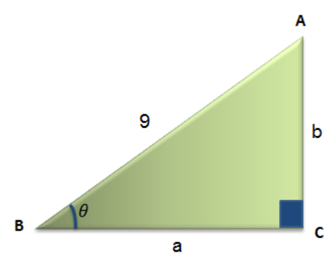
Para el siguiente triangulo rectangulo se tiene que el $\sin\theta = \frac{1}{3}$. El valor del cateto a es:

A 3

B $\sqrt{27}$

C $6\sqrt{2}$

D 81



$$\text{Dado} \sin\theta = \frac{1}{3} = \frac{cateto \quad opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{9} \quad \text{entonces,} \quad \frac{1}{3} = \frac{b}{9} \quad \text{por tanto,} \quad b = 3$$

$$\text{Utilizando Pitágoras:} \quad a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 = 81 - 9$$

$$a = \sqrt{72}$$

$$a = 6\sqrt{2}$$

Entonces, al valor correcto para a es **C)** $6\sqrt{2}$

Valores de las razones trigonométricas para ángulos notables

En trigonometría a menudo es conveniente conocer los valores de las razones trigonométricas para algunos ángulos especiales dado que los cálculos se facilitan.

TABLA DE ANGULOS NOTABLES

RADIANES	GRADOS	SENO	COSENO	TANGENTE	COTANGENTE	SECANTE	COSECANTE
0	0°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	Indefinido	0	Indefinido	1
π	180°	0	-1	0	Indefinido	-1	Indefinido
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	Indefinido	0	Indefinido	-1
2π	360°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido

Ejemplo:

de acuerdo a la tabla anterior, el valor de la expresión $\csc 60° - \tan 60° cos 45°$ es:

A) -1

B) $\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

C) $\sqrt{2}+6$

D) $\frac{6-3\sqrt{6}}{4\sqrt{3}}$

Solución:

Reemplazando los valores de la tabla se tiene

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} \quad = \quad \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{6}}{6}$$

Entonces,la respuesta correcta para la expresión $\csc 60° - \tan 60° cos 45°$ es **B)** $\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$

2.4. TALLER

A continuación encontrará un taller que contiene preguntas abiertas y preguntas de selección múltiple.

1. Las bisagras de una puerta de seguridad tienen una apertura máxima de $60°$. Esta cantidad al ser expresada en radianes es equivalente a

A $\frac{\pi}{6}$

B $\frac{\pi}{3}$

C 3π

D $\frac{3}{\pi}$

2. Si la bisagra tiene mayor capacidad de apertura describiendo un ángulo de $4\frac{\pi}{6}$, esta cantidad es equivalente a

A $120°$

B $90°$

C $60°$

D $100°$

3. Una terna pitágorica consiste en tres números enteros que definen las medidas de los lados de un triángulo rectángulo cumpliendo el Teorema de Pitágoras.

I $(3, 4, 5)$ y $(5, 12, 13)$

II $(7, 24, 25)$ y $(1, 1, \sqrt{2})$

III $(8, 15, 17)$ y $(9, 40, 41)$

De los anteriores pares de ternas de números enteros cuál son ternas pitágoricas

A I únicamente

B II y III

C I y II

D I y III

4. Al expresar $-90°$ en radianes se obtiene

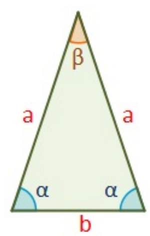
A $\frac{\pi}{2}$ rad

B $-\pi$ rad

C $-\frac{\pi}{2}$ rad

D $\frac{\pi}{3}$ rad

5. El triángulo de la figura se puede clasificar como



A Isósceles, ya que tiene dos lados desiguales.

B Equilátero, ya que todos sus lados tienen la misma medida.

C Isósceles, ya que dos de sus lados tienen la misma medida.

D Rectángulo, ya que tiene un ángulo recto.

6. Si un poste de electricidad se encuentra perpendicular respecto al suelo, proyectando una sombra de $60cm$ en el suelo, y esta sujeto con una cuerda que mide $100cm$. La altura del pote sería de

A $80cm$

B $120cm$

C $80m$

D $100cm$

7. La ecuación de la circunferencia unitaria es $x^2 + y^2 = 1$.

I $(-\frac{4}{9}, -\frac{\sqrt{66}}{9})$

II $(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4})$

III $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

De los anteriores puntos cual(es) punto(s) pertenecen a la circunferencia unitaria.

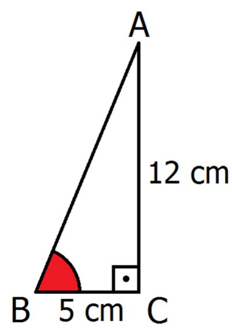
A I únicamente

B II únicamente

C I y II

D I y III

De acuerdo a la figura responda responda las preguntas 8-10.



8. Para el $\sphericalangle B$ la razon trigonométrica *coseno* es igual a

A $\cos B = \frac{12}{5}$

B $\cos B = \frac{5}{12}$

C $\cos B = \frac{5}{13}$

D $\cos B = \frac{13}{5}$

9. Para el $\sphericalangle B$ la razon trigonométrica *seno* es igual a

A $\text{sen}\, B = \frac{12}{5}$

B $\text{sen}\, B = \frac{5}{12}$

C $\text{sen}\, B = \frac{12}{13}$

D $\text{sen}\, B = \frac{13}{12}$

10. Para el $\sphericalangle B$ la razon trigonométrica *tangente* es igual a

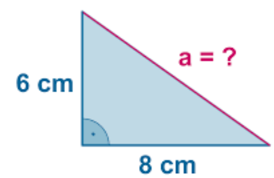
A $\tan B = \frac{12}{5}$

B $\tan B = \frac{5}{12}$

C $\tan B = \frac{5}{13}$

D $\tan B = \frac{13}{5}$

11. La medida de la hipotenusa en el siguiente triángulo es



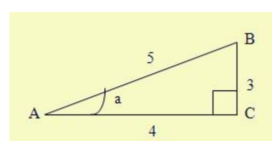
A 12

B 9

C 10

D 100

Responda las preguntas 12-15 de acuerdo a la siguiente figura.



12.Para el $\sphericalangle \alpha$ la razon trigonométrica *seno* es igual a

A $\text{sen}\, B = \frac{3}{5}$

B $\text{sen}\, B = \frac{5}{4}$

C $\text{sen}\, B = \frac{5}{3}$

D $\text{sen}\, B = \frac{4}{5}$

LOGROS:

* Identifica y define las funciones trigonométricas en la circunferencia unitaria.
* Establece relaciones entre las funciones trigonométricas.

Capítulo 3

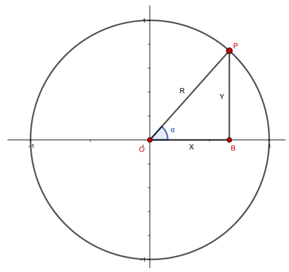
Funciones Trigonométricas

Funciones Trigonométricas
La palabra Trigonometría viene del griego **Trigónon** que significa triángulo y la palabra **metrón** que significa medición. Así, Trigonometría hace referencia a la medición de triángulos. Desde la antiguedad se ha utilizado para la navegación y la topografía. Las funciones trigonométricas se pueden estudiar a partir de la circunferencia unitaria, extendiendo el dominio de las funciones al conjunto de los números reales,teniendo en cuenta las razones trigonométricas establecidas en el triángulo rectángulo.

En esta sesión daremos la definición de función trigonométrica y discutiremos sobre sus propiedades, dominio y rango.

3.1. CIRCUNFERENCIA UNITARIA.

La circunferencia unitaria es aquella que tiene su centro en el origen y su radio es igual 1.



De la figura se puede ver que la medida de los catetos son x y y respectivamente, además,el radio de la circunferencia tiene una medida igual a 1. Aplicando el Teorema de pitágoras se tiene que la ecuación de la circunferencia unitaria es:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Todos los puntos $P(x, y)$ que satisfacen la igualdad pertenecen a la circunferencia.

Ejemplo
Comprobar que el punto $P(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ pertenece a la circunferencia unitaria.
Solución. se tiene que $x = \frac{4}{5}$ y $y = \frac{3}{5}$, reemplazamos los valores de x e y en la ecuación de la circunferencia unitaria así:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$$

como son fracciones homogéneas tenemos que

$$\frac{25}{25} = 1$$

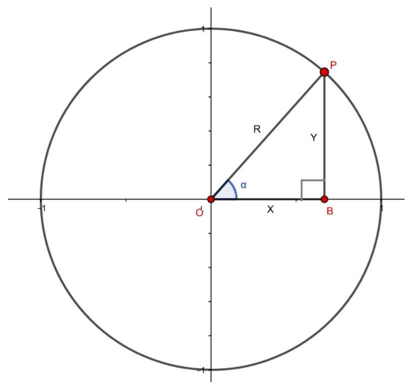
simplificando

$$1 = 1$$

Efectivamente el punto $P(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ si pertenece a la circunferencia unitaria.

3.2. DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos nuevamente la circunferencia unitaria donde se tiene un ángulo α en posición canónica cuyo lado final es un radio que intersecta a la circunferencia en un punto $P(x, y)$. Se puede observar que se forma un triángulo rectángulo cuyos catetos miden x e y respectivamente.



En la sesión 2 se definieron la razones trigonométricas utilizando el triángulo rectángulo, recordando esa definición se tiene que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cateto \quad opuesto}{hipotenusa} = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{cateto \quad adyacente}{hipotenusa} = \frac{x}{r}$$

En este caso el radio de la circunferencia tiene una medida igual a 1; y los catetos opuestos y adyacentes tienen medidas x y y respectivamente, por tanto se definen las funciones trigonométricas como:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x$$

De manera similar se definen las funciones *tangente*, *cotangente*, *secante* y *cosecante* así:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{x} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{y}$$

Se destaca que cada ángulo α define un único punto $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria.
Para determinar el **signo de las funciones trigonométricas** se debe reconocer en que cuadrante se encuentra ubicado el punto $P(x, y)$. De esta manera, si tenemos un ángulo $\alpha = \frac{3\pi}{4} rad$ el punto de intersección con la circunferencia unitaria tiene coordenadas $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, como la Coordenada en x es negativa entonces el *coseno* de α es negativo.
En la siguiente tabla se establecen los signos de las funciones trigonométricas por cuadrantes teniendo en cuenta la posición del punto determinado por el ángulo α en posición canónica.

Cuadrante	Signos de (x, y)	Funciones positivas	Funciones negativas
I	$x > 0,\ y > 0$	$sen\alpha,\ cos\alpha, tan\alpha,\ cot\alpha$ $sec\alpha,\ csc\alpha$	Ninguna
II	$x < 0,\ y > 0$	$sen\alpha,\ csc\alpha$	$cos\alpha, tan\alpha,\ cot\alpha$ $sec\alpha,$
III	$x < 0,\ y < 0$	$tan\alpha,\ cot\alpha$	$sen\alpha,\ cos\alpha$ $sec\alpha,\ csc\alpha$
IV	$x > 0,\ y < 0$	$cos\alpha, sec\alpha$	$sen\alpha,\ tan\alpha,\ cot\alpha$ $csc\alpha$

3.3. DOMINIO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El dominio de las funciones trigonométricas depende de las coordenadas del punto P determinado por el valor del ángulo α. Se tiene que:

- El dominio de las Funciones $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ se puede extender al conjunto de los números Reales ya que el ángulo α puede tomar cualquier valor.
- El dominio de las funciones $\tan\alpha$ y $\sec\alpha$ no están definidas para ángulos con valores $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ ya que $x = 0$, es decir el valor de la función Coseno es Cero.
- El dominio de las funciones $\cot\alpha$ y $\csc\alpha$ no están definidas para ángulos con valores 0 y π ya que $y = 0$, es decir el valor de la función seno es Cero.

Más adelante cuando se analicen las gráficas y características de cada función entonces se determinara el Dominio y Rango de las funciones.

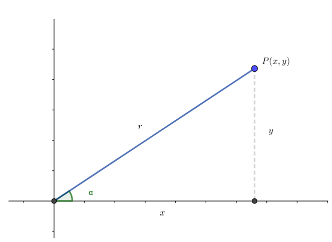
3.4. DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA CUALQUIER ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL.

Para cualquier ángulo α agudo en posición normal y un punto $P(x, y)$ ubicado en el lado final. Si r es la distancia desde el origen al punto $P(x, y)$, entonces se cumple que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Teniendo en cuenta las razones trigonométricas definidas para el triángulo rectángulo se definen las funciones trigonométricas como:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} \qquad \csc\alpha = \frac{r}{y}$$

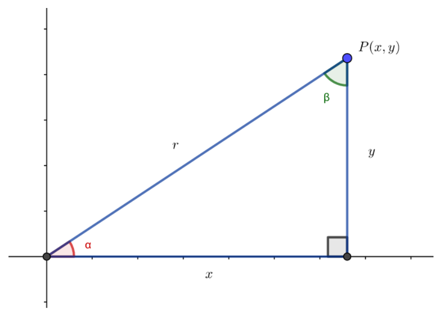
$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}$$



3.5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS.

Recordando la clasificación de ángulos tenemos que un ángulo α es complementario a un ángulo β si $\alpha + \beta = 90°$. En un triángulo rectángulo ya se tiene un ángulo recto, por lo tanto los otros dos ángulos son complementarios entre sí. Para ángulos complementarios se tiene la siguiente propiedad para las funciones trigonométricas, ésta relación se denomina **Cofuncionalidad**



$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \qquad \operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$$
$$\tan\alpha = \cot\beta \qquad tan\beta = \cot\alpha$$
$$\sec\alpha = \csc\beta \qquad \sec\beta = \csc\alpha$$

El valor de la función trigonométrica de un ángulo es igual al valor de la cofunción correspondiente de su ángulo complementario.

3.6. PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

Las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo tienen su aplicatividad en áreas como la ingeniería, la física, astronomía y navegación. puesto que me permiten calcular distancias entre puntos.
Para resolver problemas aplicando las funciones trigonométricas se debe tener en cuenta la importancia del Teorema de pitágoras, además recordar siempre que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°. Al momento de resolver un problema aplicando funciones trigonométricas se pueden seguir los siguientes pasos:

1 Se lee bien el enunciado del problema y se realiza un dibujo de a situación que me describen.

2 Después de tener el dibujo de la situación se identifica el triángulo rectángulo con las medidas correspondientes y la variable o incógnita a encontrar.

3 después de analizar la información se busca la función trigonométrica que relaciona la incógnita con las medidas dadas.

4 por último, se despeja la variable o incógnita para poder dar la respuesta.

Ejemplo
El grupo de estudiantes de ciclo V camina por las calles de fusagasugá y se encuentran con el edificio de un centro comercial. Uno de los estudiantes plantea ubicarse a $40m$ de distancia alejado del edificio y afirma que el ángulo de elevación para poder mirar la terraza del edificio es de $52°$. Con esta información los estudiantes creen poder calcular la altura del edificio.
1. ¿pueden los estudiantes calcular la altura del edificio con esta información?
2. ¿Qué función trigonométrica pueden utilizar para este propósito?
3. La altura del edificio es

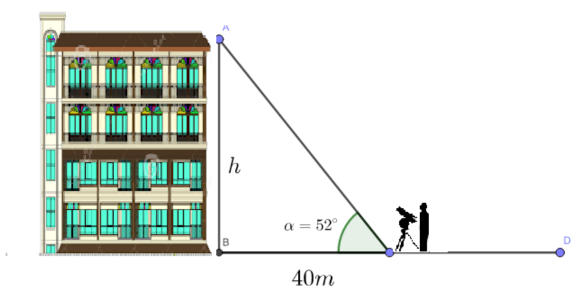
A 50 m

B $51,2$ m

C $52,1$ m

D 40 m

Solución.



1. Si, si es posible encontrar la altura del edificio sabiendo la distancia a la que se encuentran como observadores y el ángulo de elevación para poder ver la parte alta del edificio.
2. La función trigonométrica adecuada para resolver esta situación es la $\tan\alpha$, ya que por definición se tiene que $\tan\alpha = \frac{cateto \quad opuesto}{cateto \quad adyacente}$. En este caso se conoce el cateto adyacente el cual tiene una medida de 40 m, y el ángulo es igual a $\alpha = 52°$.
3. Dicho lo anterior y teniendo la gráfica de la situación aplicamos la definición de la función $\tan 52°$, Así:

$$\tan 52° = \frac{h}{40}$$

Despejando h de la expresión se obtiene

$$h = 40\tan 52° \approx 51,2$$

La altura del edificio es aproximadamente de $h \approx 51,2$, Por lo tanto la respuesta correcta es la opción B.

LOGROS:

* Explica las características y propiedades básicas de las funciones trigonométricas a partir de su representación gráfica.
* Construye las lineas trigonométricas para cualquier ángulo.
* Establece relaciones entre las gráficas de las funciones trigonométricas.

Capítulo 4

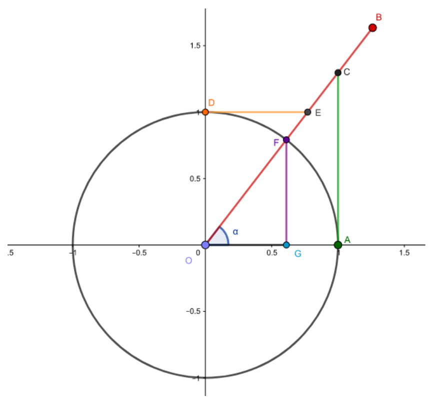
Gráficas de las Funciones Trigonométricas

En la Siguiente sesión trataremos sobre las gráficas de las funciones trigonométricas, su construcción y se hará un análisis sobre el dominio y el rango de cada función teniendo en cuenta su respectiva gráfica.

4.1. LINEAS TRIGONOMÉTRICAS.

En la sesión anterior se definió las funciones trigonométricas en la circunferencia unitaria, para poder definir las lineas trigonométricas debemos retomar la circunferencia unitaria, estas lineas trigonométricas permitirán construir las gráficas de las funciones trigonométricas.

Las **lineas trigonométricas** de un ángulo α en posición normal son los segmentos de recta cuyas medidas coinciden con cada uno de los valores de la funciones trigonométricas.



Para definir la linea trigonométrica correspondiente a cada función recordamos la definición de las razones trigonoétricas. Además se utilizara las criterios de proporcionalidad dado que los triángulos OGF, OAC y EDO son semejantes. para el triángulo OGF se tiene por definición:

$$\operatorname{sen}\alpha = \overline{FG} \qquad\qquad \cos\alpha = \overline{OG}$$

De esta manera se tiene que el segmento $\overline{FG}$ es la linea trigonométrica para $\operatorname{sen}\alpha$, además, $\overline{OG}$ es la linea trigonométrica para $\cos\alpha$.
Para los triángulos OGF, OAC se cumple que:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{FG}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1}$$

Así la linea trigonométrica de $\tan\alpha$ es es el segmento $\overline{AC}$.

$$\sec\alpha = \frac{\overline{OF}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OC}}{1}$$

Así la linea trigonométrica de $\sec\alpha$ es el segmento $\overline{OC}$.

Para los triángulos OGF, EDO se cumple que:

$$\cot\alpha = \frac{\overline{OG}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{DE}}{1}$$

Así la linea trigonométrica de $\cot\alpha$ es el segmento $\overline{DE}$.

$$\csc\alpha = \frac{\overline{OF}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OE}}{1}$$

Así la linea trigonométrica de $\csc\alpha$ es el segmento $\overline{OE}$.

Si los ángulos están ubicados en otros cuadrantes, las lineas trigonométricas se construyen de igual manera pero toca considerar los signos.

Determinar los signos de las lineas trigonométricas para los otros cuadrantes con sus respectivas gráficas queda como ejercicio para el estudiante.

4.2. GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

El ejercicio de construir las gráficas de las funciones trigonométricas resulta ser una actividad divertida, para ellos se necesitara de ciertos materiales como: compás, transportador, regla y hojas de papel milimétrico. Luego de tener estos materiales se procede de la siguiente manera:

1 Con el compás se traza la circunferencia unitaria, y con el transportados marcamos algunos ángulos especiales y le ponemos su valor en radianes.

2 Teniendo en cuenta la función trigonométrica a trabajar se dibuja entonces la linea trigonométrica correspondiente a cada ángulo.

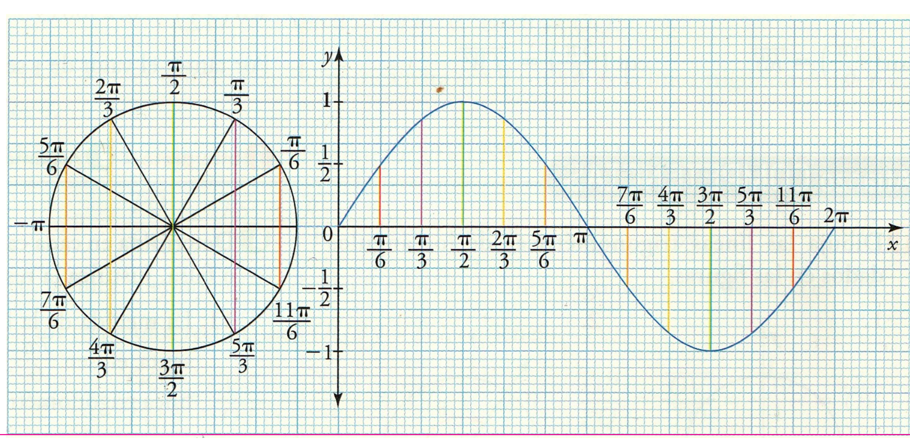
3 Se ubica la coordenada cartesiana para cada medida de ángulo en el eje x y en el eje y. Esto nos permite determinar la medida para cada linea trigonométrica.

4 Se ubica en el plano cartesiano las medidas respectivas para cada angulo..

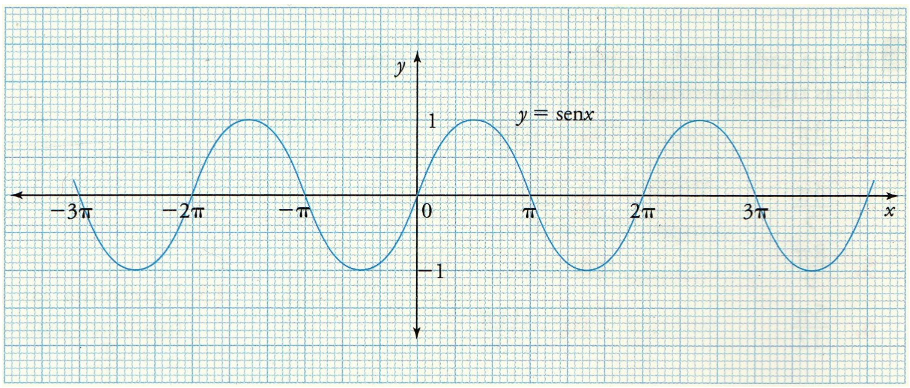
5 Por ultimo, se unen los puntos para finalizar la construcción de la gráfica.

4.2.1. Función Seno ($f(x) = \operatorname{sen} x$)

La definición de la función trigonométrica seno establece que la linea trigonométrica correspondiente es el segmento paralelo al eje y que tiene como punto inicial un punto sobre la circunferencia y su punto final se encuentra sobre el eje x. Por lo tanto, la medida del seno de un ángulo es la medida y, Así $\operatorname{sen} x = y$



Características de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.
Si se amplia el intervalo en la gráfica de la función Seno vemos como se repite cada 2π



La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función periódica que por sus características permite modelar fenómenos ondulatorios y movimientos armónicos. A continuación se enuncian algunas características de la función *seno*.

- La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ no presenta restricciones gráficamente, por lo que la variable independiente puede tomar cualquier valor. Por tanto, el Dominio es $\mathbb{R}$
- En la gráfica de la función se puede verificar que los valores máximo y mínimo son 1 y -1 respectivamente. Por lo tanto el rango o recorrido de la función es el intervalo $[-1, 1]$. Escrito de otra manera el rango de la función es el conjunto $y = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$.
- La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función impar por lo que se cumple que $f(x) = \operatorname{sen}(-x) = f(x) = -\operatorname{sen} x$, por tanto la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es simétrica respecto al punto de origen del sistema de coordenadas.
- La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función periódica con periodo $p = 2\pi$. por tanto, $f(x) = \operatorname{sen} x = f(x) = \operatorname{sen}(x + 2n\pi)$ donde $n \in \mathbb{Z}$
- los cortes de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ ene el eje x se encuentra para todos los múltiplos de π. Es decir, $f(x) = \operatorname{sen} x = 0$ para todo $x = n\pi$ donde $n \in \mathbb{Z}$.
- Para los valores Máximo y mínimo de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ se tiene que:
  El valor Máximo $f(x) = \operatorname{sen} x = 1$ se encuentra en los puntos $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$. El valor Mínimo $f(x) = \operatorname{sen} x = -1$ se encuentra en los puntos $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$.
- La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ varía de la siguiente manera:

  Crece de 0 a 1 en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$

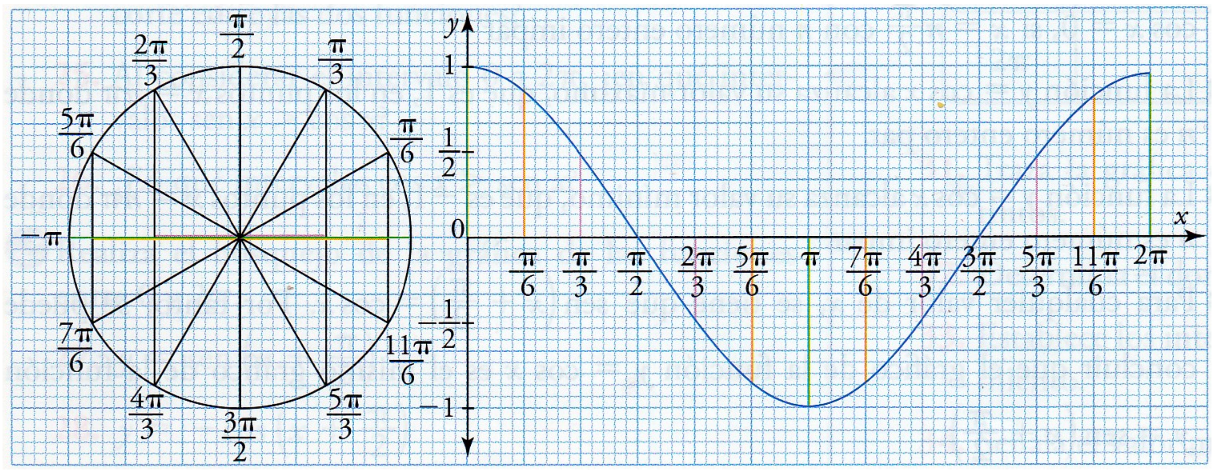
  Decrece de 1 a 0 en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

  Decrece de 0 a -1 en el intervalo $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$

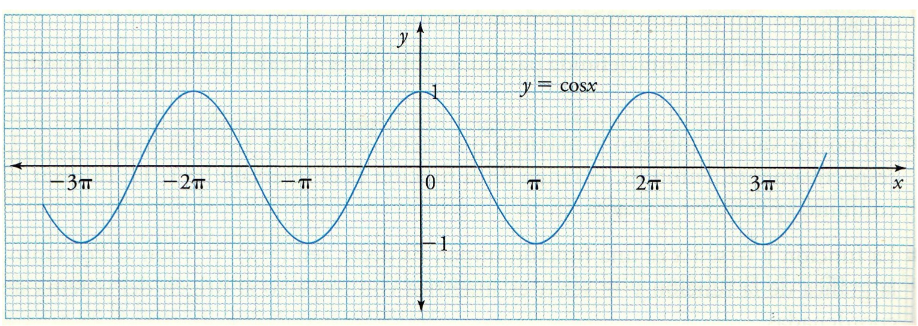
  Crece de -1 a 0 en el intervalo $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

4.2.2. Función Coseno ($f(x) = \cos x$)

Para construir la gráfica de la función trigonométrica *coseno* se debe reconocer que la linea trigonométrica correspondiente es el segmento de recta que determina la proyección del radio de la circunferencia sobre el eje x. A partir de la medida de las lineas trigonométricas correspondientes a la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ se determinan los valores para realizar la gráfica. Asi:



Características de la función $f(x) = \cos x$. Si se amplia el intervalo en la gráfica de la función Coseno vemos como se repite cada 2π



La función $f(x) = \cos x$ al igual que la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función periódica que por sus características permite modelar fenómenos ondulatorios y movimientos armónicos. A continuación se enuncian algunas características de la función *Coseno*.

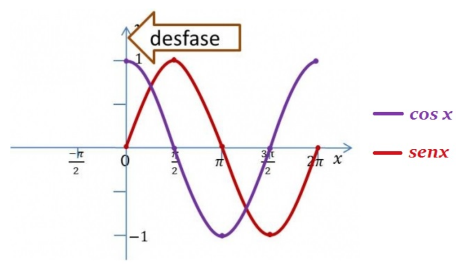
- La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ no presenta restricciones gráficamente, por lo que la variable independiente puede tomar cualquier valor. Por tanto, el Dominio es $\mathbb{R}$
- En la gráfica de la función se puede verificar que los valores máximo y mínimo son 1 y -1 respectivamente. Por lo tanto el rango o recorrido de la función es el intervalo $[-1, 1]$. Escrito de otra manera el rango de la función es el conjunto $y = \{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$.
- La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una función par por lo que se cumple que $f(x) = \cos(-x) = f(x) = \cos x$, por tanto la gráfica de la función $f(x) = \cos x$ es simétrica respecto al eje y.

- La función $f(x) = \cos x$ es una función periódica con periodo $p = 2\pi$. por tanto, $f(x) = cos x = f(x) = \cos(x + 2n\pi)$ donde $n \in \mathbb{Z}$
- los cortes de la función $f(x) = \cos x$ ene el eje x se encuentra para todos los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$. Es decir, $f(x) = \cos x = 0$ para todo $x = \frac{n\pi}{2}$ donde n es un número entero impar.
- Para los valores Máximo y mínimo de la función $f(x) = \cos x$ se tiene que:
  El valor Máximo $f(x) = \cos x = 1$ se encuentra en los puntos $x = n\pi$ donde n es un número entero par . El valor Mínimo $f(x) = \operatorname{sen} x = -1$ se encuentra en los puntos $x = n\pi$ donde n es un número entero impar.
- La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ varía de la siguiente manera:
  Decrece de 1 a 0 en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$

  Decrece de 0 a -1 en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

  Crece de -1 a 0 en el intervalo $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$

  Crece de 0 a 1 en el intervalo $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

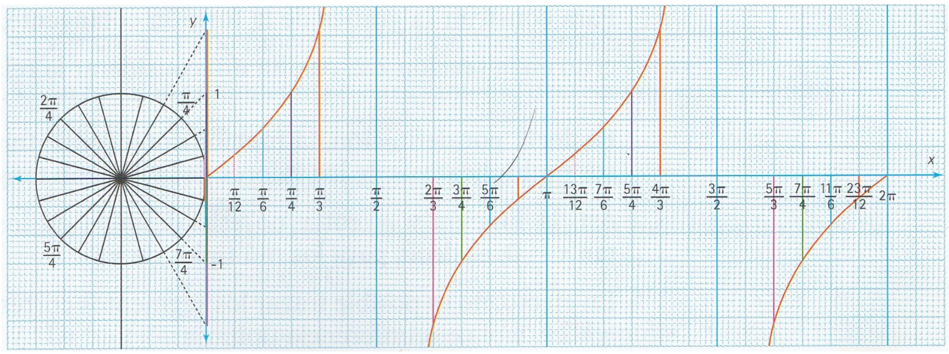


- La gráfica de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \cos x$ tienen un ángulo de desfase de $\frac{\pi}{2}$, esto quiere decir que ambas funciones tienen la misma forma pero una se traslada $\frac{\pi}{2}$ adelante de la otra. Por tanto se cumple que $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

4.2.3. Función tangente ($f(x) = \tan x$)

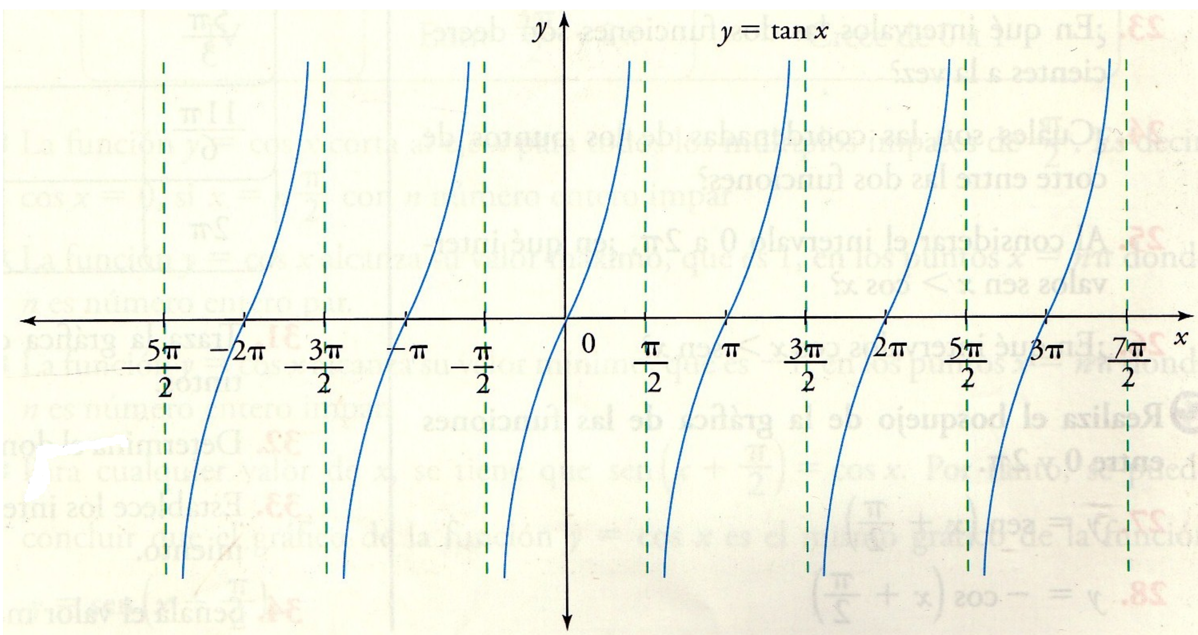
La gráfica de la función $f(x) = \tan x$ se construye a partir de las medidas de la linea trigonométrica para los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Como se puede observar en la siguiente gráfica no es posible trazar las líneas trigonométricas de la función tangente para los ángulos $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ entonces la función $f(x) = \tan x$ no esta definida para los valores $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$. De forma general, la función $f(x) = \tan x$ no está definida para los valores de $x = n\frac{\pi}{2}$ donde n es número entero impar. En estos puntos encontramos **Asíntotas verticales.**



Características de la función $f(x) = \tan x$.

La gráfica de la función tangente para un intervalo más grandes se ve así:



La función $f(x) = \tan x$ tiene las siguientes características:

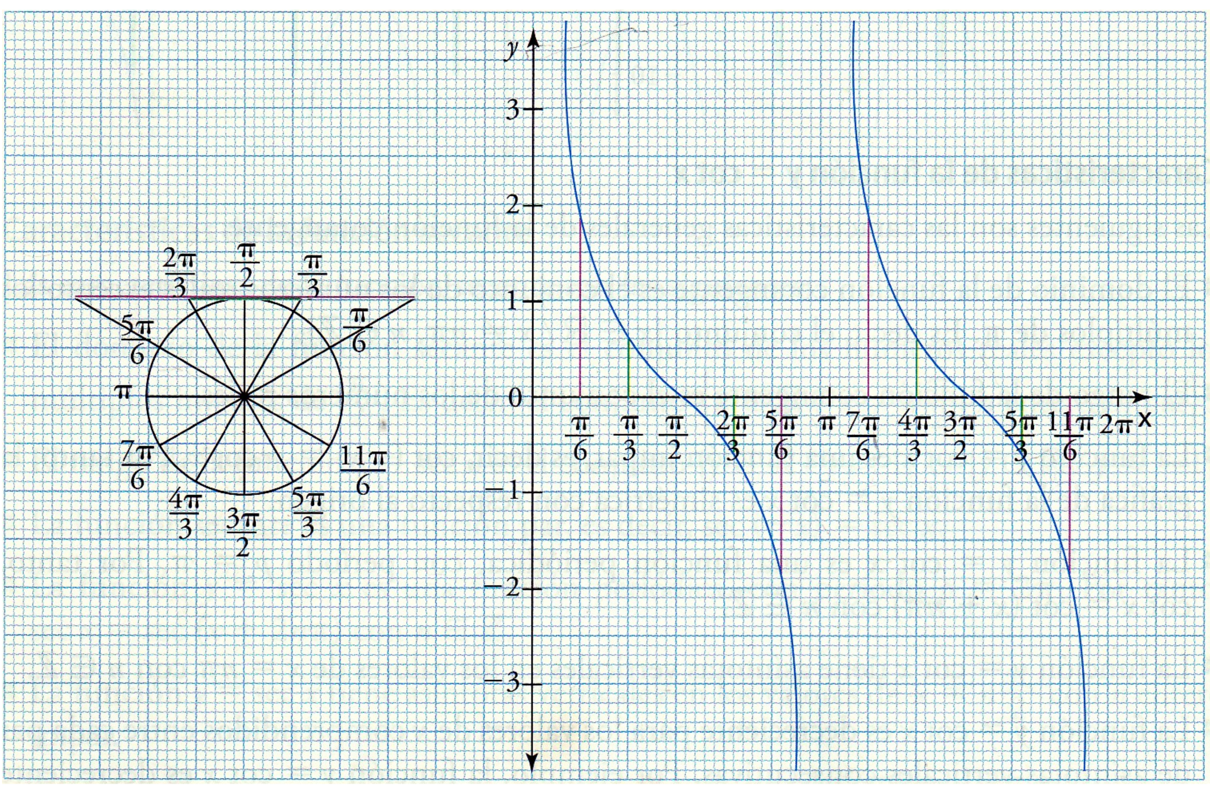
- El dominio de la función tangente es el conjunto de los números reales excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ donde se encuentran las asíntotas verticales. escrito en modo de conjunto:

$$Dom f = \{x \in \mathbb{R}/x \neq n\frac{\pi}{2}, \quad n \quad entero \quad impar\}$$

- El rango o recorrido de la función $f(x) = \tan x$ es el conjunto de los números $\mathbb{R}$
- La función $f(x) = \tan x$ es una función impar, por tanto se cumple que $f(x) = \tan(-x) = f(x) = -\tan x$. Por tanto, la gráfica de la función es simétrica respecto al origen del sistema de coordenadas.
- la función $f(x) = \tan x$ es una función periódica, con periodo $p = \pi$. Por tanto, $f(x) = \tan x = f(x) = \tan(x + n\pi)$ donde $n \in \mathbb{Z}$
- La función $f(x) = \tan x$ tiene asintotas verticales en los puntos $n\frac{\pi}{2}$ donde n es un Entero impar.
- La función $f(x) = \tan x$ es creciente para todos los valores de x entre cada par de asíntotas consecutivas, Así la función $f(x) = \tan x$ es creciente para los valores de x en los intervalos $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$
- Los cortes de la función $f(x) = \tan x$ en el eje x se encuentran en los valores múltiplos de $x = \pi$. Es decir, $f(x) = \tan x = 0$ si $x = n\pi$ donde $n \in \mathbb{Z}$.

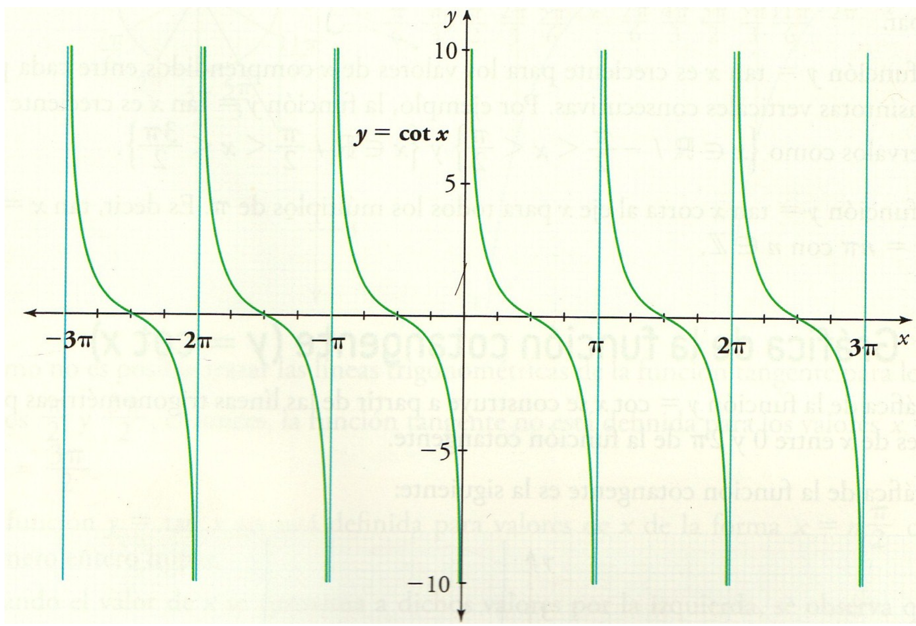
4.2.4. Función cotangente ($f(x) = \cot x$)

La gráfica de la función $f(x) = \cot x$ se construye a partir de las medidas de la linea trigonométrica para los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$. Como se muestra a continuación en la gráfica.



Como se puede observar en la gráfica no es posible trazar las líneas trigonométricas de la función cotangente para los ángulos 0, π y 2π entonces la función $f(x) = \cot x$ no esta definida para los valores $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$. De forma general, la función $f(x) = cotx$ no está definida para los valores de $x = n\pi$ donde $n \in \mathbb{Z}$. En estos puntos encontramos **Asíntotas verticales.**

Características de la funcion $f(x) = \cot x$**.**
La gráfica de la función Cotangente para un intervalo más grandes se ve así:



La función $f(x) = \cot x$ tiene las siguientes características:

- El dominio de la función cotangente es el conjunto de los números reales excepto los múltiplos de π donde se encuentran las asíntotas verticales. escrito en modo de conjunto:

$$Domf = \{x \in \mathbb{R}/x \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

- El rango o recorrido de la función $f(x) = \cot x$ es el conjunto de los números $\mathbb{R}$

- La función $f(x) = \cot x$ es una función impar, por tanto se cumple que $f(x) = \cot(-x) = f(x) = -\cot x$. Por tanto, la gráfica de la función es simétrica respecto al origen del sistema de coordenadas.

- la función $f(x) = \cot x$ es una función periódica, con periodo $p = \pi$. Por tanto, $f(x) = \cot x = f(x) = \cot(x + n\pi)$ donde $n \in \mathbb{Z}$

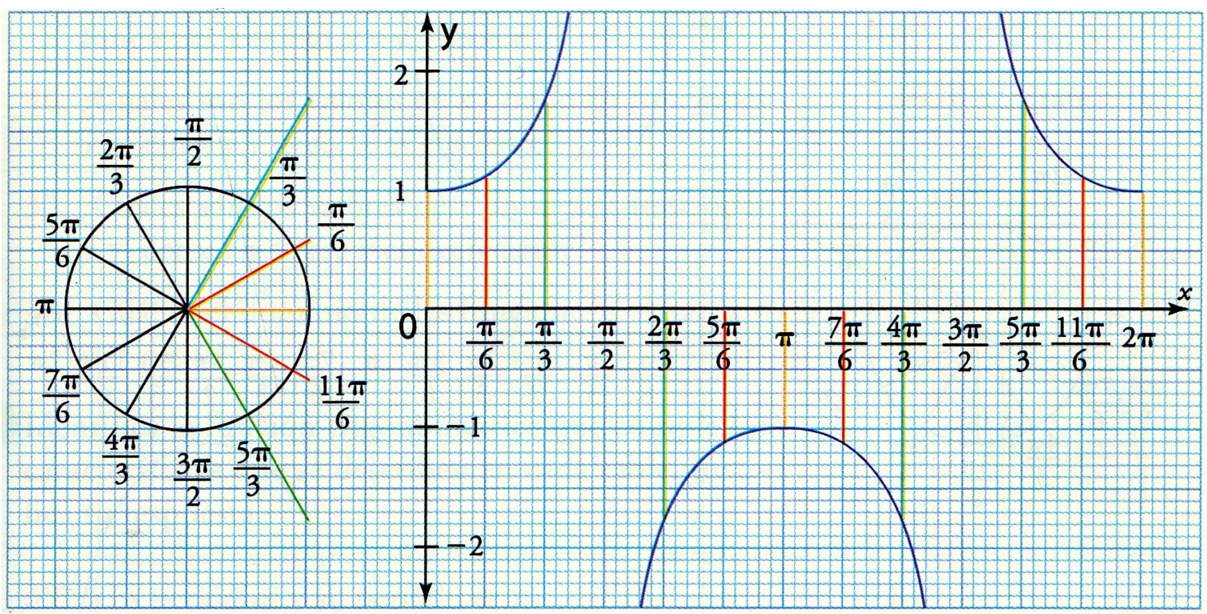
- La función $f(x) = \cot x$ tiene asintotas verticales en los puntos $x = n\pi$ donde n es un número Entero.

- La función $f(x) = \tan x$ es creciente para todos los valores de x entre cada par de asíntotas consecutivas, Así la función $f(x) = \cot x$ es decreciente para los valores de x en los intervalos $(0, \pi)$,$(\pi, 2\pi)$

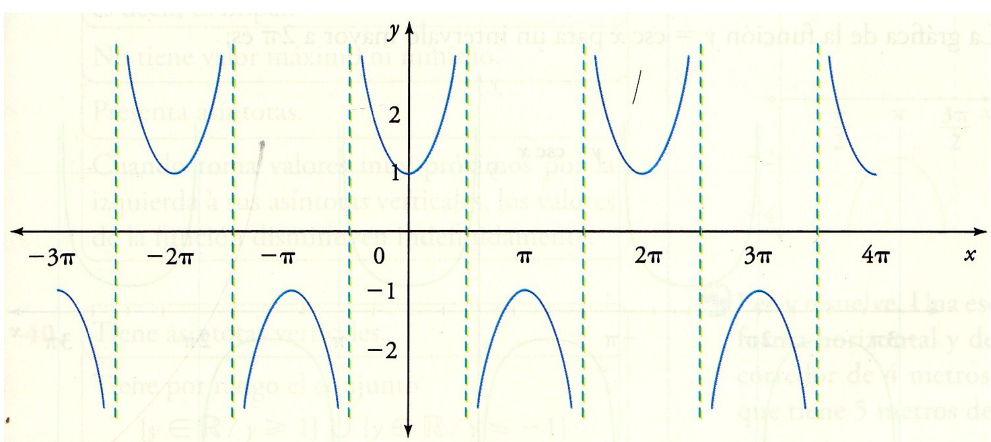
- Los cortes de la función $f(x) = \cot x$ en el eje x se encuentran en los valores múltiplos impares de $x = \frac{\pi}{2}$. Es decir, $f(x) = \cot x = 0$ si $x = n\frac{\pi}{2}$ donde n es un número entero impar.

4.2.5. Función secante ($f(x) = \sec x$)

La gráfica de la función $f(x) = \sec x$ se construye a partir de las medidas de la linea trigonométrica para los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$. Como se muestra a continuación en la gráfica.



Características de la función $f(x) = \sec x$**.**
La gráfica de la función Secante para un intervalo más grandes se ve así:



La función $f(x) = \sec x$ tiene las siguientes características.

- El dominio de la función secante es el conjunto de los números reales excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ donde se encuentran las asíntotas verticales. escrito en modo de conjunto:

$$Domf = \{x \in \mathbb{R}/x \neq n\frac{\pi}{2}, \quad n \quad entero \quad impar\}$$

- El rango o recorrido de la función $f(x) = \sec x$ es el conjunto

$$Ranf = \{y \in \mathbb{R}/y \geq 1\} \bigcup \{y \in \mathbb{R}/y \leq -1\}$$

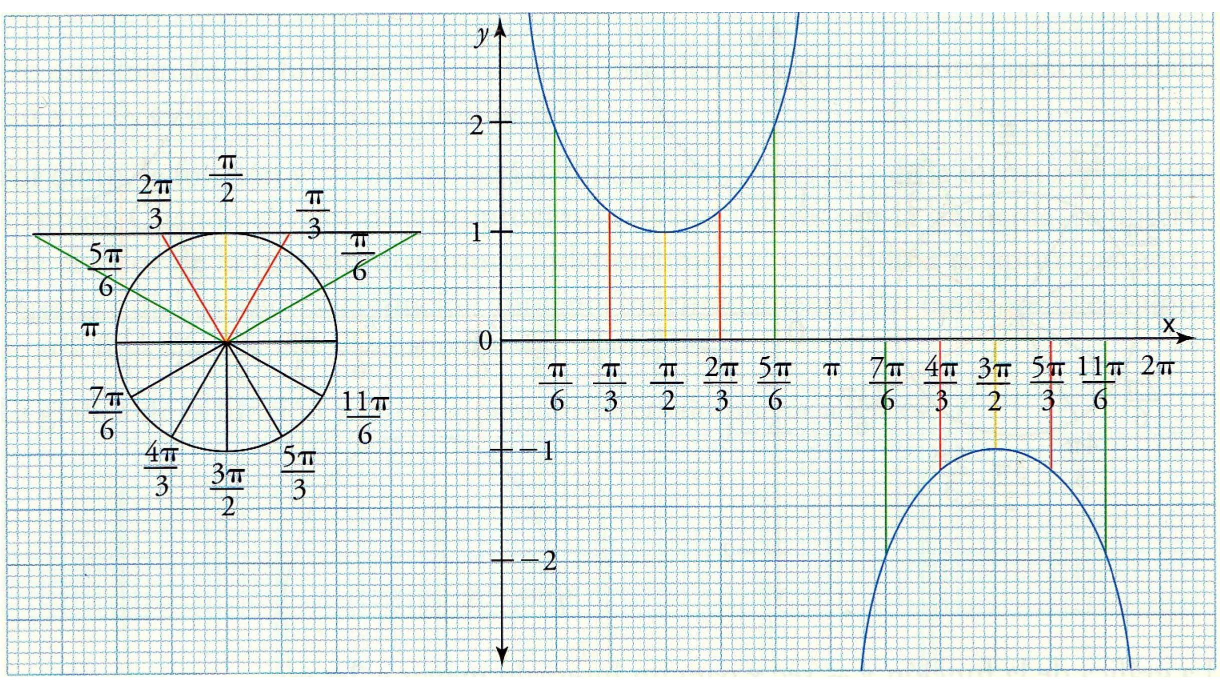
- La función $f(x) = \sec x$ es una función par, es decir, $f(x) = \sec(-x) = \sec x$
- La función $f(x) = \sec x$ es una función periódica, con periodo $p = 2\pi$. Por tanto, $f(x) = \sec x = \sec(x + 2n\pi)$ donde $n \in \mathbb{Z}$.
- La función $f(x) = \sec x$ tiene asíntotas verticales en los valores de $x = n\frac{\pi}{2}$ donde n es un número entero impar.
- La función $f(x) = \sec x$ varía de la siguiente manera:

  La función es creciente en los intervalos $[0, \frac{\pi}{2})$ y $(\frac{\pi}{2}, \pi]$.

  La función es decreciente en los intervalos $[\pi, \frac{3\pi}{2})$ y $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.
- La función $f(x) = \sec x$ no tiene cortes en el eje x.

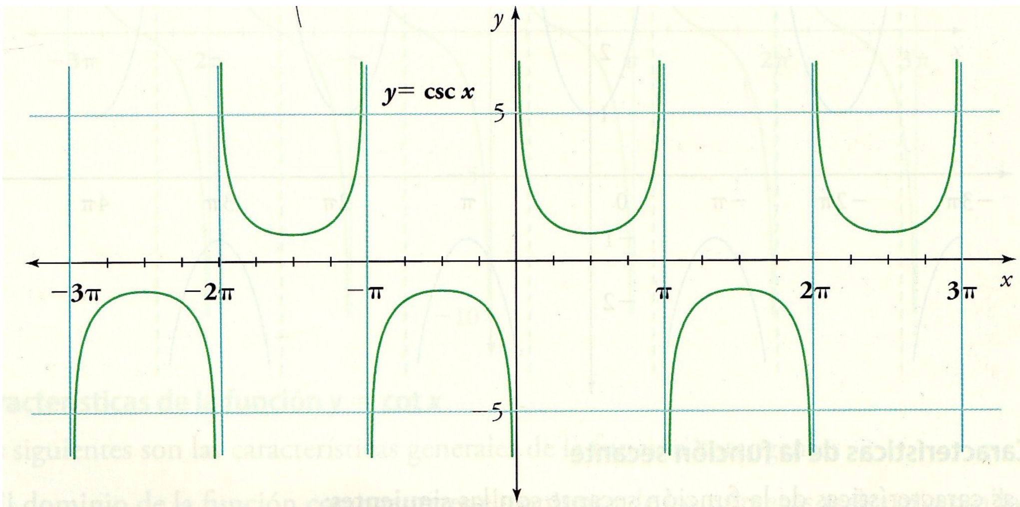
4.2.6. Función Cosecante ($f(x) = \csc x$)

La gráfica de la función $f(x) = \sec x$ se construye a partir de las medidas de la linea trigonométrica para los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$. Como se muestra a continuación en la gráfica.



Características de la función $f(x) = \csc x$.

La gráfica de la función Cosecante para un intervalo más grandes se ve así:



La función $f(x) = \csc x$ tiene las siguientes características.

- El dominio de la función cosecante es el conjunto de los números reales excepto los múltiplos de π donde se encuentran las asíntotas verticales. escrito en modo de conjunto:

$$Dom f = \{x \in \mathbb{R}/x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

- El rango o recorrido de la función $f(x) = \csc x$ es el conjunto

$$Ran f = \{y \in \mathbb{R}/y \geq 1\} \bigcup \{y \in \mathbb{R}/y \leq -1\}$$

- La función $f(x) = \csc x$ es una función impar, es decir, $f(x) = \csc(-x) = -\csc x$
- La función $f(x) = \csc x$ es una función periódica, con periodo $p = 2\pi$. Por tanto, $f(x) = \csc x = \csc(x + 2n\pi)$ donde $n \in \mathbb{Z}$.
- La función $f(x) = \csc x$ tiene asíntotas verticales en los valores de $x = n\pi$ donde n es un número entero.
- La función $f(x) = \csc x$ varía de la siguiente manera:

  La función es creciente en los intervalos $[\frac{\pi}{2}, \pi)$ y $(\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

  La función es decreciente en los intervalos $(0, \frac{\pi}{2}]$ y $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.
- La función $f(x) = \csc x$ no tiene cortes en el eje x.

LOGROS:

* Determina la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase de funciones senoidales en un intervalo dado.

* Representa gráficamente las funciones trigonométricas en un un intervalo determinado, aplicando la variación del período, la amplitud y el desplazamiento de fase sin recurrir a tablas de valores.

* Reconoce las funciones trigonométricas inversas.

Capítulo 5

Gráficas de las Funciones Trigonométricas

En la Siguiente sesión se realizará el análisis de las gráficas de las funciones trigonométricas, cuando se presentan modificaciones en el argumento de la función, o cuando un número real suma o multiplica a la función. Además, se definirán las funciones trigonométricas inversas.

5.1. ANÁLISIS DE GRÁFICAS.

Se pueden presentar modificaciones en las funciones trigonométricas cuando la función o el argumento de la función (*variable independiente*) se suma o se multiplica por un número real. A estas modificaciones según su característica se les conoce como **traslación, reflexión, compresión o alargamiento** de la función original.

5.1.1. Traslación de Funciones

Una traslación de una función trigonométrica es un desplazamiento de la gráfica en el sistema de coordenadas sin alterar la forma original, es decir, las gráficas resultantes de realizar traslaciones siempre son iguales a la original.

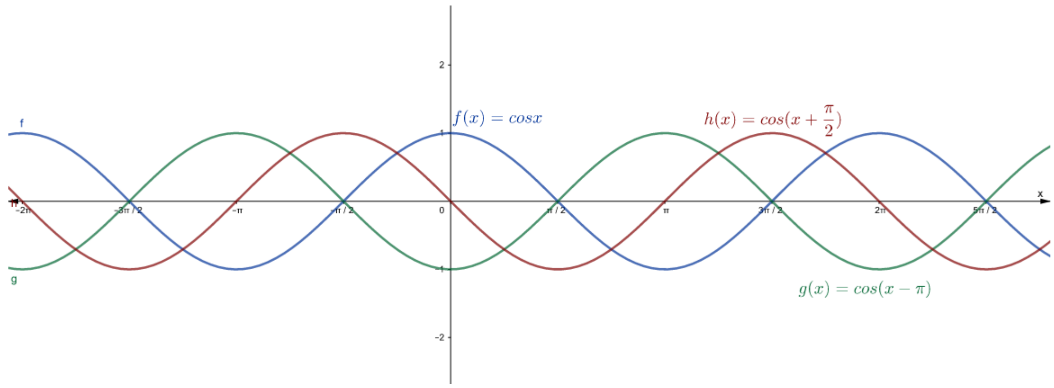
Si $f(x)$ es una función y $k \in \mathbb{R}^+$ es una constante, entonces, las gráficas $f(x) \pm k$ y $f(x \pm k)$ son traslaciones verticales y horizontales de $f(x)$ en k unidades.

Una función se puede trasladar horizontalmente hacia la derecha o la izquierda; y se puede trasladar verticalmente hacia arriba o abajo. Para reconocer más fácilmente el tipo de movimiento realizado se tiene la siguiente tabla.

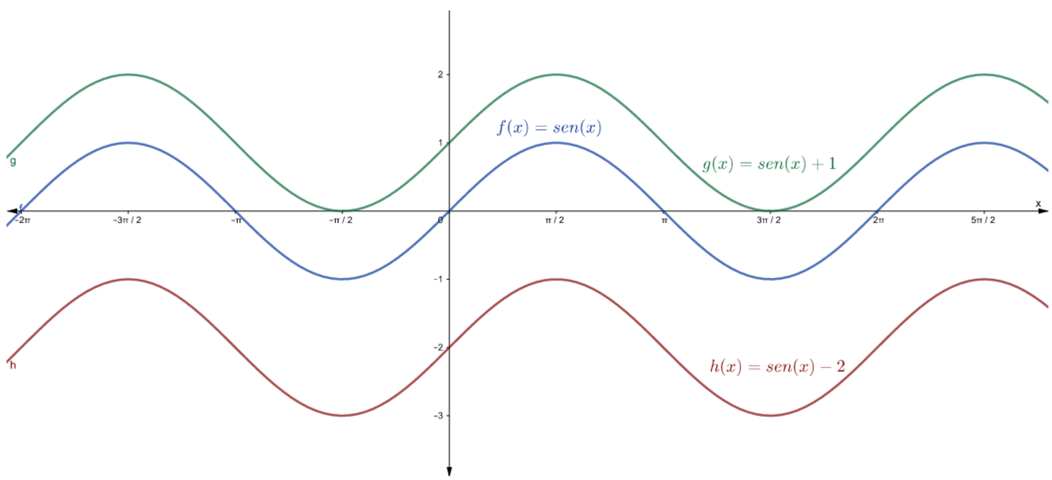
OPERACIÓN SOBRE LA FUNCIÓN	TRASLACIÓN DE UNAFUNCIÓN CON $k > 0$
$f(x)$	Función Original
$f(x+k)$	La función se traslada horizontalmente hacia la izquierda "k" unidades
$f(x-k)$	La función se traslada horizontalmente hacia la derecha "k" unidades
$f(x)+k$	La función se traslada verticalmente hacia la arriba "k" unidades
$f(x)-k$	La función se traslada verticalmente hacia la abajo "k" unidades

Ejemplos

1. A partir de la función $f(x) = \cos x$ encuentre las gráficas de las funciones $g(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ y $h(x) = \cos(x - \pi)$. Luego, diga como fue la traslación de la función original.
   Solución.
   Se puede observar en la siguiente gráfica que la forma de la función nunca cambia, tomemos la función $f(x) = \cos x$ como referencia, la función $g(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ es una traslacií horizontal hacia la izquierda de la función $f(x)$; se tiene ahora que, la función $h(x) = \cos(x - \pi)$ es una traslación horizontal hacia la derecha π unidades.



2. Realiza las gráficas de las funciones $g(x) = \operatorname{sen} x + 1$ y $h(x) = \operatorname{sen} x - 2$ y menciona que tipo de traslación se presenta teniendo como función de referencia la función $f(x) = \operatorname{sen} x$



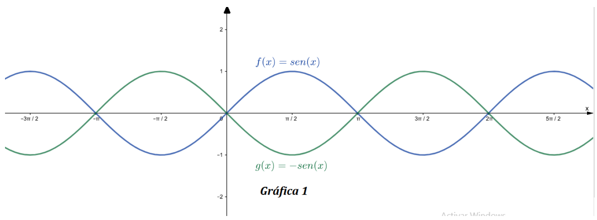
Solución.
La función nunca cambia en su forma para el intervalo donde se observa. La función $g(x) = \operatorname{sen} x + 1$ es una traslación vertical hacia arriba de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, se desplaza una unidad hacia arriba; ahora se tiene que, la función $h(x) = \operatorname{sen} x - 2$ es una traslación vertical hacia abajo de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, se desplaza dos unidades hacia abajo.

5.1.2. Reflexión de Funciones

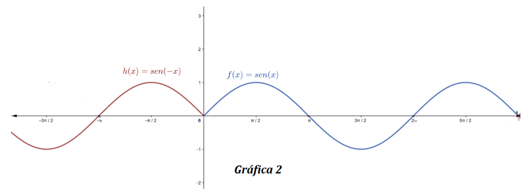
Para la reflexión de funciones se tienen dos posibles casos, la primera, la reflexión se realiza respecto al eje x si se cumple que para la función $f(x)$ entonces $g(x) = -f(x)$ donde $g(x)$ es la reflexión; la segunda, la reflexión se realiza respecto al eje y si se cumple que para la función $f(x)$ entonces $g(x) = f(-x)$ donde $g(x)$ es la reflexión.

Ejemplos

1. Determine la reflexiones respecto al eje x y el eje y de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$



Gráfica 1



Gráfica 2

Se tiene en la gráfica 1 la reflexión de la función $f(x)$ con respecto al eje x. La gráfica 2 muestra la reflexión de la función $f(x)$ respecto al eje y.

Cuando la función es par, entonces la reflexión respecto al eje y coincide con la función original.

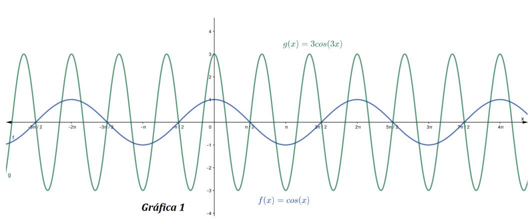
5.1.3. Compresión y alargamiento de una función

La gráfica de una función se puede comprimir o alargar cuando un valor $k \in \mathbb{R}^+$ multiplica a la función o al argumento de la función. Se pueden mostrar 4 posibles casos a la hora de comprimir o alarga una función, y pueden ser de manera horizontal o vertical.

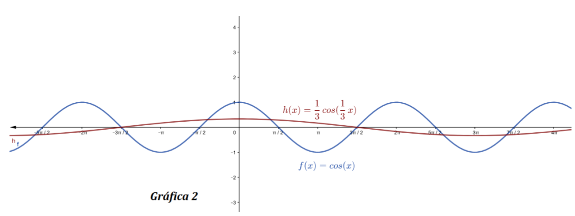
	OPERACIÓN SOBRE LA FUNCIÓN	TRASLACIÓN DE UNAFUNCIÓN CON $k > 0$
$k \in R^+$	$f(x)$	Función Original
Si $0 < k < 1$	$kf(x)$	La función se comprime verticalmente a razón de "k"
Si $k > 1$	$kf(x)$	La función se alarga de manera vertical a razón de "k"
Si $0 < k < 1$	$f(kx)$	La función se alarga de manera horizontal cuya razón es $\frac{1}{k}$
Si $k > 1$	$f(kx)$	La función se comprime horizontalmente cuya razón es $\frac{1}{k}$

Ejemplos

1. Realizar la gráfica de las funciones $g(x) = 3\cos 3x$ y $h(x) = \frac{1}{3}\cos\frac{1}{3}x$ teniendo como referencia la función $f(x) = \cos x$, diga que tipo de alargamiento o compresión hubo.



Gráfica 1



Gráfica 2

Tomando como punto de referencia la función $f(x) = \cos x$ se tiene que la función $g(x) = 3\cos 3x$ presenta un alargamiento vertical ya que tiene la forma $3f(x)$, además, presenta una compresión horizontal ya que tiene la forma $f(3x)$. ver *gráfica 1.*
Para la función $h(x) = \frac{1}{3}\cos\frac{1}{3}x$ se puede observar en la *Gráfica 2* que tiene una compresión vertical ya que tiene la forma $\frac{1}{3}f(x)$. Además, se observa que tiene un alargamiento horizontal pues tiene la forma $f(\frac{1}{3}x)$.

5.1.4. Amplitud

Sea $f(x)$ una función periódica acotada, es decir, presenta un Valor máximo M y un valor mínimo m, entonces la amplitud de la función se denota $|A|$ y se define como:

$$|A| = \left|\frac{M-m}{2}\right|$$

Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \cos x$ son ambas funciones acotadas con valores máximo y mínimo 1 y -1 respectivamente. por lo tanto su amplitud es

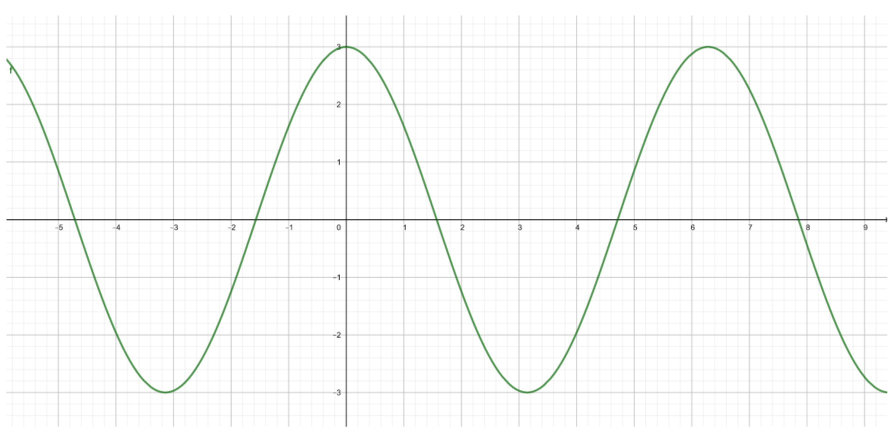
$$|A| = \left|\frac{1-(-1)}{2}\right|$$

$$|A| = \left|\frac{1+1}{2}\right| = 1$$

De la gráfica de la funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $\cos x$ vemos como la distancia desde el eje x es 1.
Las funciones $f(x) = A\operatorname{sen} x$ y $f(x) = A\cos x$ tienen amplitud $|A|$ y satisfacen las desigualdades.

$$-|A| \leq A\operatorname{sen} x \leq |A| \quad \textbf{y} \quad -|A| \leq A\cos x \leq |A|$$

Ejemplo.
Realizar la gráfica de la función $f(x) = 3\cos x$.
Solución.



Se puede observar en la imagen que el rango de la función es el intervalo $[-3, 3]$, y que la distancia desde el eje x hasta los punto máximos y mínimos de la función es de 3 unidades. Así, la amplitud de la función es $A = 3$

5.1.5. Periodo y Desfase

El periodo de una función es la longitud del intervalo más pequeño en el cual se encuentra toda la porción de la función que se repite. Para una funciones sinusoidales $f(x) = A \operatorname{sen} Bx$ y $f(x) = A \cos Bx$ se tiene que el periodo es $T = \frac{2\pi}{B}$ donde $B > 0$.
El desfase de una función sinusoidal es un desplazamiento horizontal que sufre la función. Para funciones $f(x) = A \operatorname{sen}(Bx - C)$ y $f(x) = A \cos(Bx - C)$ con periodo $T = \frac{2\pi}{B}$ y amplitud $|A|$ el número $\frac{C}{B}$ se conoce como **Desfase** de la función.

Ejemplo
Determinar la amplitud, periodo y desfase de la función $f(x) = 2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x - \pi)$,construir la gráfica.
solución.
Primeramente se identifican los tres coeficientes A, B y C. Se tiene que

$$A = 2 \quad B = \frac{\pi}{2} \quad C = \pi$$

De lo anterior se tiene que la amplitud es $A = 2$.
Para el periodo recordamos que $T = \frac{2\pi}{B}$, entonces reemplazando $B = \frac{\pi}{2}$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}$$

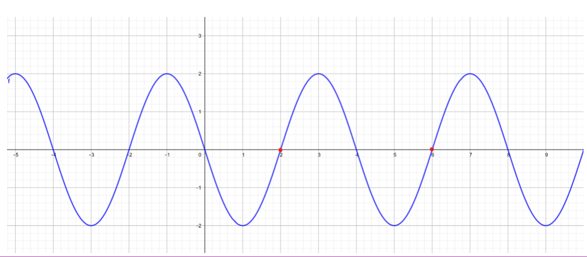
Simplificando se tiene

$$T = 4$$

Así el periodo es $T = 4$. Por último nos interesa calcular el desplazamiento de la función, como la función es $f(x) = 2 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x - \pi)$ por el signo negativo en el argumento de la función sabemos que la función se desplaza hacia la derecha. Para el desfase debemos calcular $\frac{C}{B}$.

$$\frac{C}{B} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$$

Por lo tanto el desfase de la función es igual a 2 unidades hacia la derecha.



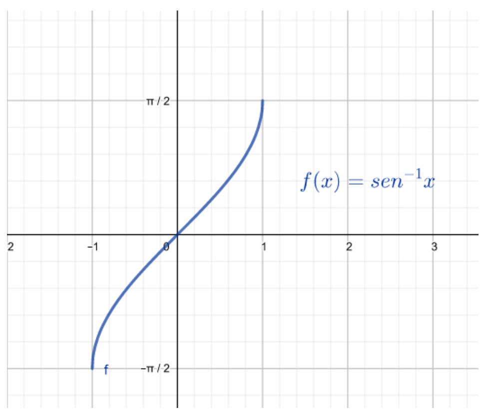
5.2. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS.

Las funciones trigonométricas son funciones periódicas y por lo tanto no son funciones inyectivas *(uno a uno)*, para poder definir una función inversa es necesario que la función sea inyectiva, dado lo anterior, para poder definir funciones inversas a las funciones trigonométricas debemos restringir el dominio de la función al intervalo donde la función si es inyectiva. A este proceso se le conoce como restricción del dominio de la función.
A continuación se definirán las funciones trigonométricas inversas.

5.2.1. Función Arcoseno ($f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$)

A la función inversa de $y = \operatorname{sen} x$ se la puede escribir como $sen^{-1}x$ ó $\operatorname{arc\,sen} x$.
La función $y = \operatorname{sen} x$ es inyectiva en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De esta manera restringiendo el dominio a este intervalo se puede definir una función inversa como:

$$f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \operatorname{sen} y, \text{ donde } y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \text{ y } x \in [-1, 1].$$

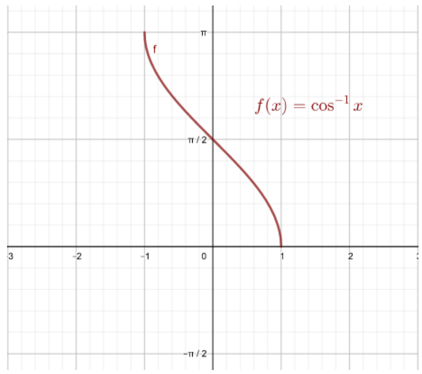


El dominio de la función $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$ es el intervalo $[-1, 1]$, Y el rango o recorrido de la función es el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

5.2.2. Función Arcocoseno ($f(x) = \cos^{-1} x$)

La función $(y = \cos x)$ es inyectiva cuando su dominio se restringe al intervalo $[0, \pi]$ por lo tanto es en este intervalo donde se puede definir su función inversa $\big(f(x) = \cos^{-1} x\big)$ de la siguiente manera.

$$f(x) = \cos^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \cos y, \text{ donde } y \in [0, \pi] \text{ y } x \in [-1, 1].$$

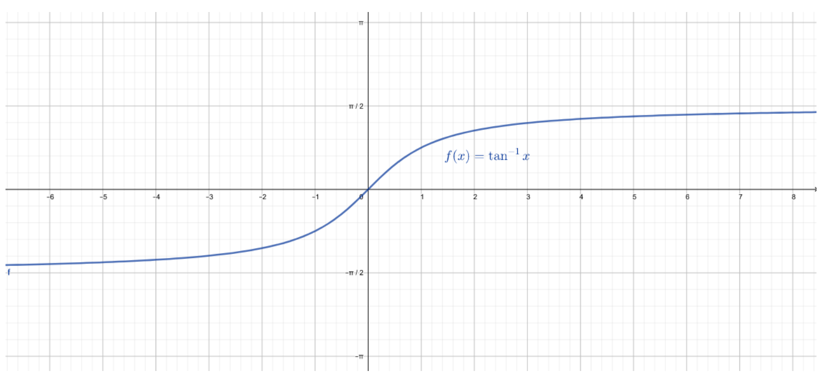


El dominio de la función $f(x) = \cos^{-1} x$ es el intervalo $[-1, 1]$, Y el rango o recorrido de la función es el intervalo $[0, \pi]$

5.2.3. Función Arcotangente $(f(x) = \tan^{-1} x)$

Para que la función $y = \tan x$ sea inyectiva se debe restringir su dominio al intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, de esta manera podemos definir su función inversa como:

$$f(x) = \tan^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \tan y, \text{ donde } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ y } x \in \mathbb{R}.$$

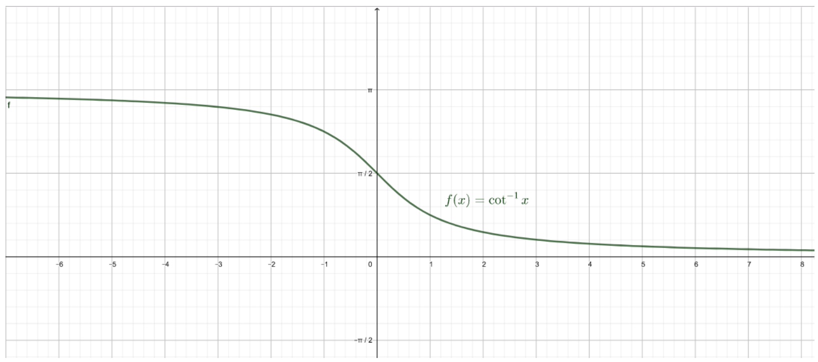


El dominio de la función $f(x) = \tan^{-1} x$ es $\mathbb{R}$. Además, el rango o recorrido de la función es el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

5.2.4. Función Arcocotangente $(f(x) = \cot^{-1} x)$

Para poder definir una función inversa a la función $y = \cot x$ se debe restringir su dominio al intervalo $(0, \pi)$. Se define la función inversa $f(x) = \cot^{-1} x$ como:

$$f(x) = \cot^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \cot y, \text{ donde } 0 \leq y \leq \pi \text{ y } x \in \mathbb{R}.$$

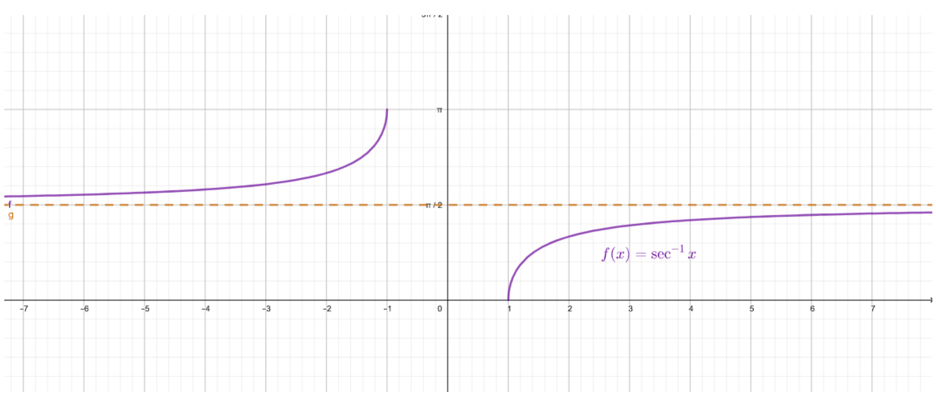


El dominio de la función $f(x) = \cot^{-1} x$ es $\mathbb{R}$. Además, el rango o recorrido de la función es el intervalo $(0, \pi)$.

5.2.5. Función Arcosecante $(f(x) = \sec^{-1} x)$

Para poder definir la función inversa a la función $y = \sec x$ ésta debe ser inyectiva, para este fin se restringe el dominio de la función al intervalo $\left[o, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. La función $f(x) = \sec^{-1} x$ se define como:

$$f(x) = \sec^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \sec y, \text{ donde } y \in \left[o, \tfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\tfrac{\pi}{2}, \pi\right] \text{ y } x \leq -1 \text{ ó } x \geq 1$$

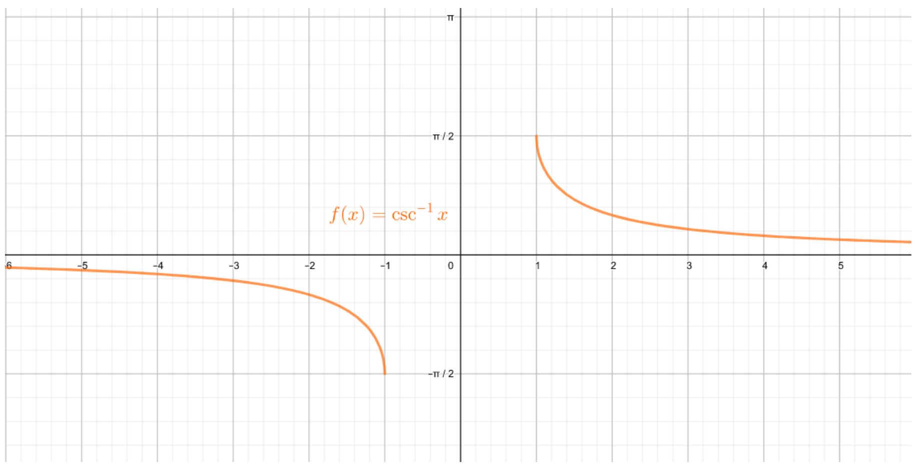


El dominio de la función $f(x) = \sec^{-1} x$ es el intervalo$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Además, el rango o recorrido de la función es el intervalo $\left[o, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

5.2.6. Función Arcocosecante ($f(x) = \csc^{-1} x$)

Para poder definir la función inversa a la función $y = \csc x$ ésta debe ser inyectiva, para este fin se restringe el dominio de la función al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. La función $f(x) = \csc^{-1} x$ se define como:

$$f(x) = \csc^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \csc y, \text{ donde } y \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right] \text{ y } x \leq -1 \text{ ó } x \geq 1$$



El dominio de la función $f(x) = \csc^{-1} x$ es el intervalo$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Además, el rango o recorrido de la función es el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5.2.7. Operaciones con funciones inversas

En la práctica se pueden encontrar a menudo expresiones que involucran funciones trigonométricas inversas, la solución para estas expresiones depende de las propiedades de las funciones trigonométricas y además de su definición.
A continuación se presentan ejemplos para el manejo y solución de expresiones con funciones trigonométricas inversas.

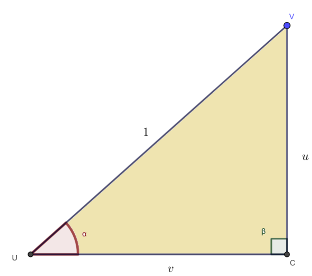
Ejemplos

1. Determinar el valor exacto para la expresión $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
   Solución.
   De la tabla de valores de las razones trigonométricas para ángulos notables se tiene que: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ Aplicando la definición de $\operatorname{sen}^{-1} x$

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

2. Determina el valor exacto de $\cos\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$
   Solución
   Del ejercicio anterior se tiene que $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$. Si se reemplaza en la expresión $\cos\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ se tiene:
   $$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
   De la tabla de valores de las razones trigonométricas para ángulos notables vemos que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Si $\cos\alpha = v$ donde α es un ángulo agudo, determinar $\tan\alpha$ en términos de v.
   Solución.
   De la definición de las razones trigonométricas se tiene que $\cos\alpha = v$, aplicando la definición de función inversa $\alpha = \cos^{-1}(\frac{v}{1})$



   Del triángulo rectángulo se observa que v es el cateto adyacente y la medida de la hipotenusa es igual a 1. Se debe hallar el cateto opuesto u para el ángulo α. Aplicamos el teorema de Pitágoras así:
   $$u^2 + v^2 = 1$$
   despejando u se tiene
   $$u = \sqrt{1 - v^2}$$
   Se define la razón trigonométrica tangente como $\tan\alpha = \frac{cateto \quad opuesto}{cateto \quad adyacente}$, Por lo tanto se tiene que:
   $$\tan\alpha = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{1 - v^2}}{v}$$

5.3. TALLER

A continuación encontrará un taller que contiene preguntas abiertas y preguntas de selección múltiple.

1. La amplitud de una función se define como:

   A El valor absoluto de la mitad de la diferencia entre el punto máximo y mínimo M y m respectivamente.

   B El valor absoluto de la diferencia entre el punto máximo y mínimo M y m.

   C El valor absoluto de la mitad de M y m.

   D La mitad de la diferencia entre el punto máximo y mínimo M y m respectivamente.

2. La amplitud de la función $f(x) = 5\cos 3x$ es

   A 3

   B 5

   C $3x$

   D $5x$

3. Para cualquier valor de x, se tiene que $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Se puede decir entonces que la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ tiene la misma gráfica de la función $f(x) = \cos x$. De lo anterior, se puede establecer que el valor de desfase entre la función $f(x) = \cos x$ y $f(x) = \operatorname{sen} x$ es

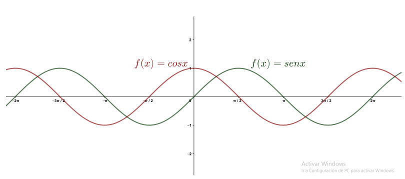
   A 2π

   B π

   C $\frac{\pi}{2}$

   D $\frac{\pi}{3}$

Observa las gráficas de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \cos x$ y responde las preguntas.



4. ¿En qué intervalos las dos funciones son crecientes a la vez?

   A $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ y $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

   B $[-\pi, 0]$ y $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

   C $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ y $[\pi, 2\pi]$

   D $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

5. ¿En qué intervalos las dos funciones son decrecientes a la vez?

   A $[0, \pi]$

   B $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

   C $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

   D $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

6. ¿Para que valores de x las dos funciones se cortan?

   A $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$

   B $x = -\frac{3\pi}{4}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$

   C $-\frac{3\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$

   D $x = -\frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$

7. Al considerar el intervalo $[0, 2\pi]$ en que intervalos $\operatorname{sen} x > \cos x$

   A $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

   B $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$

   C $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

   D $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$

8. Al considerar el intervalo $[0, 2\pi]$ en que intervalos $\cos x > \operatorname{sen} x$

A $\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

B $\left(-\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right)$

C $\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right)$

D $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

9. El dominio y rango de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ son los conjuntos.

A $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$

B $x \in \mathbb{R}$ y $y \in [-1, 1]$

C $x \in [-1, 1]$ y $y \in [-1, 1]$

D $x \in [0, 2\pi]$ y $y \in [-1, 1]$

10. La función $f(x) = \tan x$ tiene asíntotas verticales para los valores $x = n\frac{\pi}{2}$ donde n es un entero impar. Por lo tanto, el dominio de la función $f(x) = \tan x$ es el conjunto:

A $x \in \mathbb{R}$

B $x \in \mathbb{R}/x = n\frac{\pi}{2}$ donde n es entero impar

C $x \in \mathbb{R}/x \neq n\frac{\pi}{2}$ donde n es entero impar.

D $x \in \mathbb{R}/x \neq n\pi$ donde n es entero.

11. Se tiene la función $f(x) = \cos x$. Dada la función $g(x) = \frac{1}{4}\cos x$, se dice que la función $g(x)$ respecto a la función $f(x)$ es una

A Es una traslación horizontal hacia la derecha.

B Es un alargamiento de la función $f(x)$ ya que se multiplica por $\frac{1}{4}$

C Es una compresión de la función $f(x)$ ya que se multiplica por $\frac{1}{4}$

D Es una traslación vertical hacia arriba en $\frac{1}{4}$ de unidad.

12. La función $f(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})$ respecto a la función $g(x) = \operatorname{sen} x$ es una

A Es una traslación horizontal hacia la izquierda ya que en el argumento se encuentra el signo ”$-$”

B Es una traslación vertical hacia abajo ya que en el argumento se encuentra el signo ”$-$”

C Es una traslación vertical hacia arriba ya que en el argumento se encuentra el signo ”$-$”

D Es una traslación horizontal hacia la derecha ya que en el argumento se encuentra el signo ”$-$”

13. La función $g(x) = \operatorname{sen}(x) + 2$ respecto a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es una

A Es una traslación vertical hacia abajo en dos unidades ya que se resta siempre dos al valor de la función $\operatorname{sen} x$

B Es una traslación vertical hacia abajo en dos unidades ya que se suma siempre dos al valor de la función $\operatorname{sen} x$

C Es una traslación horizontal hacia la derecha ya que se suma siempre dos al valor de la función $\operatorname{sen} x$.

D Es una traslación vertical hacia arriba en dos unidades ya que se suma siempre dos al valor de la función $\operatorname{sen} x$.

LOGROS:

* Define las condiciones para resolver un triángulo cualquiera.
* Determina los elementos de un triángulo rectángulo empleando las funciones trigonométricas.

Capítulo 6

Aplicaciones de las Funciones trigonométricas.

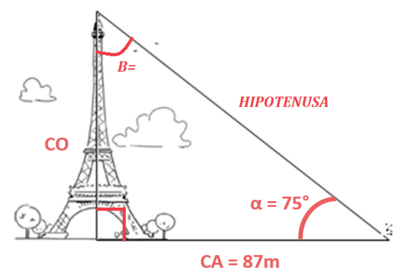
Las funciones trigonométricas desde la antigüedad se han utilizado en áreas como la astronomía, la navegación y la topografía, permitiendo calcular distancias inaccesibles por los métodos convencionales como medir la circunferencia de la tierra, o la distancia de la tierra a la luna.
Para dar respuesta a cada uno de estos problemas se ha utilizado la trigonometría para solucionar triángulos. A continuación se explicará en que consiste solucionar un triángulo y las diferentes herramientas para hacerlo.

Resolver un triángulo consiste en determinar la medida de sus tres lados y sus tres ángulos.

Para resolver un triángulo se debe tener en cuenta qué tipo de triángulo es y si conocemos la medida de algunos de sus lados o algunos ángulos. Se pueden presentar dos posibles casos al resolver un triángulo ya que puede ser un triángulo rectángulo o un triángulo oblicuángulo.

6.1. SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Un triángulo rectángulo nos puede representar variedad de situaciones en las que interviene la altura de edificios, distancia de un objeto a su destino. En la imagen se puede ver que un triángulo rectángulo podría permitir encontrar la altura de la Torre Eiffel de manera analítica.



Para resolver un triángulo rectángulo se pueden presentar dos casos:

- Se conoce la medida de uno de sus lados y de un ángulo agudo
- Se conocen las medidas de dos lados

6.1.1. Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conocen la medida de un lado y un ángulo agudo

Cuando se presenta este caso, se debe plantear una razón trigonométrica que relacione el ángulo que se conoce con la medida del lado dado, de esta manera se podrá despejar uno de los lados desconocidos. Además, como es un triángulo rectángulo entonces se sabe que uno de los ángulos mide 90° y como se sabe la medida de un segundo ángulo podemos hallar la medida del tercer ángulo recordando que "*la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a* 180° ", es decir, $\alpha + \beta + 90° = 180°$.
A continuación se presentan unos ejemplos.

Ejemplo

Resolver el triángulo rectángulo asociado con la altura de la Torre Eiffel

En este caso se conoce la longitud del cateto adyacente y el ángulo de elevación. Se hace una lista con los elementos que se conocen y las incógnitas a encontrar.

1. $ca = 87m$; $co = ?$; $hipotenusa = ?$
2. $\alpha = 75°$; $\beta = ?$; $\theta = 90°$

Como se conoce la medida de dos ángulos se puede encontrar la medida del ángulo β. Así:

$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

$$75° + \beta + 90° = 180°$$

$$\beta = 180° - 165° = 15°$$

Por tanto el ángulo $\beta = 15°$.
Se conoce la medida del cateto adyacente, utilizando la razón trigonométrica $tan\alpha$ se puede encontrar la medida del cateto opuesto. Así:

$$\tan 75° = \frac{CO}{87}$$
$$CO = 87 \tan 75° \approx 324,68m$$

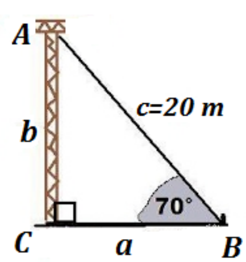
La altura de la torre Eiffel es aproximadamente de $324,68m$
Por último, se debe calcular la longitud de la hipotenusa, para ello se puede utilizar el teorema de pitágoras o se utiliza una razón trigonométrica que involucre la distancia conocida con la medida a conocer. En este caso se utilizará una razón trigonométrica que relacione la medida del cateto adyacente y la hipotenusa.

$$\cos 75° = \frac{87}{HI}$$

$$HI = \frac{87}{\cos 75°} \approx 336,14$$

La longitud de la hipotenusa es aproximadamente de $336,14m$.

Ejemplo
Resolver el triángulo rectángulo que forma la antena con el tensor que la fija al suelo.



Para iniciar se reconoce que elementos del triángulo se conocen y cuales son las incognitas, en este caso se conoce la longitud de la hipotenusa y el angulo que forma el tensor con el suelo. Primero se calcula el cateto correspondiente a la antena utilizando la función $sen\beta$. Así:

$$\operatorname{sen} 70^\circ = \frac{b}{20}$$

$$b = 20 \operatorname{sen} 70^\circ \approx 18{,}79$$

La altura de la antena es aproximadamente de 18,79m.
Como se dijo en el ejemplo anterior, en este punto se puede encontrar el lado faltante usando una razón trigonométrica o aplicando el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = (20)^2 - (18,79)^2$$
$$a = \sqrt{(20)^2 - (18,79)^2}$$
$$a = \sqrt{400 - 353,20}$$
$$a = \sqrt{46{,}79} \approx 6{,}84$$

El cateto a mide aproximadamente 6,84 m.
Por último, calculamos la medida del ángulo que falta. Así

$$70^\circ + 90^\circ + \sphericalangle A = 180^\circ$$

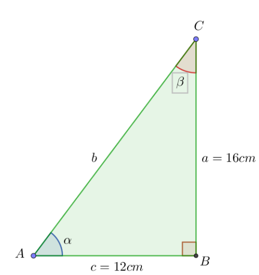
$$\sphericalangle A = 180^\circ - 70^\circ - 90^\circ = 20^\circ$$

El ángulo superior tiene una medida de 20°.

6.1.2. Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conocen las medidas de dos lados.

Cuando se presenta un triángulo rectángulo del cuál se conocen las medidas de dos de sus lados se puede aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar la medida del lado faltante. Como es un triángulo rectángulo uno de los ángulos va a tener una medida igual a 90°, para encontrar la medida de los otros dos ángulos se debe utilizar las funciones trigonométricas inversas.

Ejemplo: Resolver el triángulo ABC cuyos cateto miden 12cm y 16cm respectivamente.



Como se conocen las medidas de dos de los lados entonces se puede encontrar la longitud del tercer lado aplicando el Teorema de Pitágoras. Así:

$$b^2 = (12)^2 + (16)^2$$

$$b = \sqrt{(12)^2 + (16)^2}$$

$$b = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400}$$

$$b = 20$$

Por lo tanto la hipotenusa tiene una longitud de 20m.
conociendo la medida de los lados se aplica una razón trigonométrica de tal manera que se pueda encontrar el valor de α. Así:

$$\tan \alpha = \frac{16}{12}$$

Se aplica la función inversa.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{16}{12}\right) \approx 53^\circ$$

Por último, se halla la medida del ángulo β.

$$53^\circ + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 53^\circ - 90^\circ = 37^\circ$$

Luego el ángulo $\beta = 37^\circ$. De esta manera queda resuelto el triángulo rectángulo.

Ejemplo.
Para cargar cierta mercancía al camión de transporte se debe utilizar una rampa que tiene una longitud de 6m, y una altura de 2m desde el suelo a la compuerta del camión. Resuelva el triángulo rectángulo que se forma.

Para solucionar este triángulo se comenzará encontrando la longitud del lado faltante ya que se conoce la medida de la hipotenusa y del cateto correspondiente a la altura, aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$(2)^2 + b^2 = (6)^2$$

$$4 + b^2 = 36$$

$$b^2 = 36 - 4$$

$$b = \sqrt{32} \approx 5,6$$

por tanto la base de la rampa mide aproximadamente $5,6$m.
Ahora se debe calcular la medida del ángulo de elevación de la rampa respecto al suelo, así:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{6}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2}{6}\right) \approx 19^\circ$$

Ya teniendo el ángulo α de elevación, se debe encontrar el ángulo faltante:

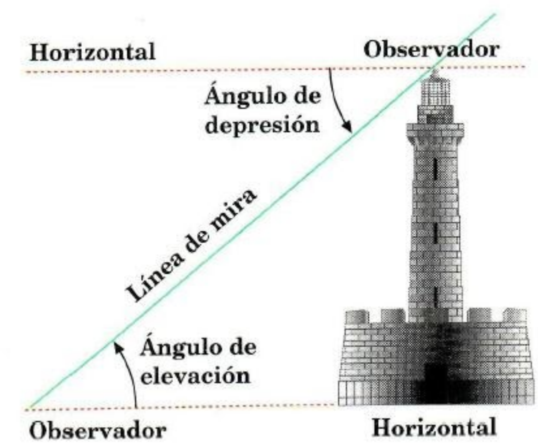
$$19^\circ + 90^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 19^\circ - 90^\circ = 71^\circ$$

Por tanto, el ángulo superior de la rampa tiene una medida de 71°. Cómo ya se conocen todos los seis elementos del triángulo formado por la rampa entonces el triángulo ha sido resuelto.

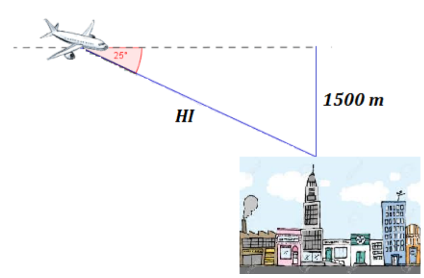
6.2. ÁNGULO DE ELEVACIÓN Y ÁNGULO DE DEPRESIÓN.

La noción de ángulo de inclinación resulta ser intuitiva cuando se presenta una situación en la cuál el observador tiene su linea visual por arriba de la linea horizontal, se puede pensar en una persona que observa la torre más alta de un castillo desde el suelo cuando hacemos referencia a un ángulo de elevación; de la misma manera, resulta intuitivo pensar en un ángulo de depresión en el momento en que nuestra linea visual está por abajo de la horizontal, considerando nuevamente el ejemplo, se piensa en una persona que observa desde la torre más alta de un castillo a un individuo que se encuentra en el suelo.



Ejemplo.

Un avión vuela cerca a una ciudad, desde la cabina del avión el piloto observa la torre más alta de una ciudad con un ángulo de depresión de 25°, se sabe que cuando pase el avión sobre la torre la distancia entre ambos objetos será de 1500 m. ¿A qué distancia se encuentra el avión de la punta de la torre al momento de ver la ciudad?



Lo que plantea el ejercicio es que se debe calcular la longitude de la hipotenusa del triángulo rectángulo. Como se conoce la medida del cateto opuesto y la medida del ángulo de depresión se utiliza una razón trigonométrica que vincule la medida del cateto con la hipotenusa. Así:

$$\operatorname{sen} 25^\circ = \frac{1500}{HI}$$

$$HI \operatorname{sen} 25^\circ = 1500$$

$$HI = \frac{1500}{\operatorname{sen} 25^\circ} \approx 3549,30$$

Por lo tanto el avión se encuentra a una distancia aproximada de 3549,30 m de la torre.

6.3. TALLER

A continuación encontrará un taller que contiene preguntas abiertas y preguntas de selección múltiple.

1. Si en un triángulo rectángulo ABC se conoce la medida del ángulo $\sphericalangle B$ y de su lado opuesto b, ¿Cuál función trigonométrica debe aplicarse para hallar la medida de la hipotenusa?

   A $\operatorname{sen} B$

   B $\cos B$

   C $\tan B$

   D $\operatorname{sen} A$

2. Si $\overline{AB}$ es la linea horizontal respecto al observador y C es el punto en el que se ubica un objeto. ¿ Dónde debe ubicarse el punto C para que el $\sphericalangle CAB$ sea un ángulo de depresión?

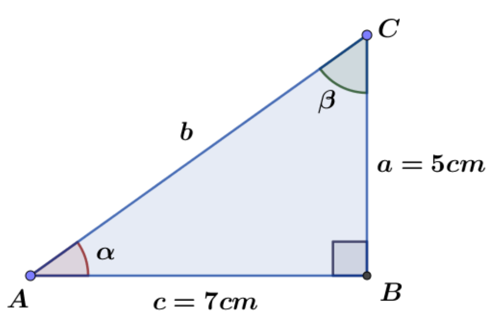
   A Arriba del segmento $\overline{AB}$

   B Arriba del punto B

   C Abajo del segmento $\overline{AB}$

   D Abajo del punto B

3. Se tiene un triangulo rectángulo del cuál se conocen los dos cateto, Las medidas de los dos ángulos agudos respectivamente serían:



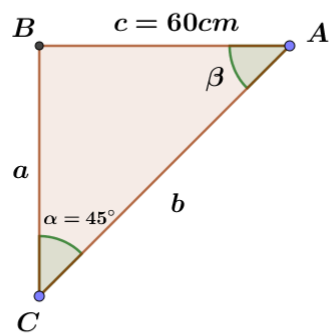
   A $\alpha = 55°$ y $\beta = 35°$

   B $\alpha = 35°$ y $\beta = 55°$

   C $\alpha = 60°$ y $\beta = 30°$

   D $\alpha = 53°$ y $\beta = 55°$

En base al siguiente triángulo rectángulo, responda



4. La medida del angulo β es

   A $\beta = 35°$

   B $\beta = 54°$

   C $\beta = 40°$

   D $\beta = 45°$

5. La medida del cateto a es

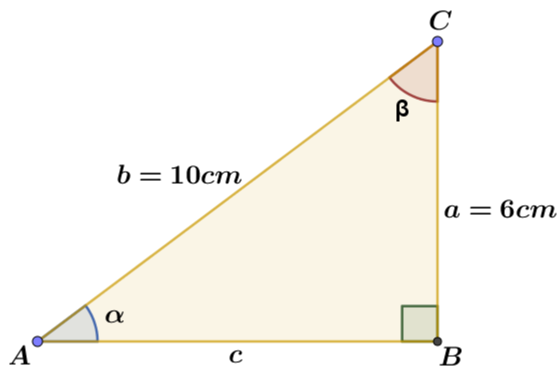
   A $a = 60$ cm

   B $a = 84$ cm

   C $a = 48$ cm

   D $a = 70$ cm

En base al siguiente triángulo rectángulo, responda



6. El valor de $\cos \alpha$ sería:

A $\cos \alpha = \frac{6}{10}$

B $\cos \alpha = \frac{8}{10}$

C $\cos \alpha = \frac{10}{6}$

D $\cos \alpha = \frac{10}{8}$

7. El valor de $\cos \alpha$ sería:

A $\cos \beta = \frac{6}{10}$

B $\cos \beta = \frac{8}{10}$

C $\cos \beta = \frac{10}{6}$

D $\cos \beta = \frac{10}{8}$

8. La medida del ángulo α es aproximadamente de

A $\alpha = 36°$

B $\alpha = 35°$

C $\alpha = 63°$

D $\alpha = 40°$

9. La medida del ángulo β es aproximadamente de

A $\beta = 36°$

B $\beta = 45°$

C $\beta = 40°$

D $\beta = 54°$

10. Una escalera tiene una longitud de $5m$. Si se apoya sobre un pared, forma un ángulo de elevación con el suelo de 60°. ¿ Qué altura alcanzará dicha escalera sobre la pared?

A $h \approx 4,3m$

B $h \approx 3,4m$

C $h = 4m$

D $h = 3m$

11. Desde lo alto de un edificio de 80 metros de altura, se observa a una persona caminar por la calle según un ángulo de depresión de 30°. ¿ A qué distancia se encuentra la persona del edificio?

A $d = \frac{80}{\tan 30°}$

B $d = \frac{80}{\tan 60°}$

C $d = \frac{80}{\cot 30°}$

D $d = \frac{80}{\cot 60°}$

12. Un topógrafo desea calcula la altura de un cerro. Toma un punto de observación a 5,000 metros de la base del cerro, y enfoca la cima con un ángulo de elevación de 60° respecto al suelo. ¿ Qué altura tiene la montaña?

A $h = 5000 \tan 30°$

B $h = 5000 \tan 60°$

C $h = \frac{5000}{\tan 30°}$

D $h = \frac{5000}{\tan 60°}$

LOGROS:

∗ Utiliza las funciones trigonométricas para resolver triángulos oblicuángulos.

∗ Resuelve problemas que involucran la solución de triángulos oblicuángulos.

Capítulo 7

Solución de Triángulos Oblicuángulos.

En esta sesión se establecerá la solución para todos los tipos de triángulos diferentes a los triángulos rectángulos. Para este fin se ha de utilizar la ley de Senos.

Triángulos Oblicuángulos

Todos aquellos triángulos que no poseen un ángulo recto se denominan triángulos oblicuángulos, es decir, todo triángulo que no sea rectángulo es un triángulo oblicuángulo.

Para resolver Triángulos obtusángulos se debe tener en cuenta las medidas que se conocen del triángulo, y luego determinar a que caso corresponde.

1: Se conoce las medidas de un lado y dos ángulos (LAA o ALA).

2: Se conoce la medida de dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA).

3: Se conocen las medidas de los tres lados (LLL).

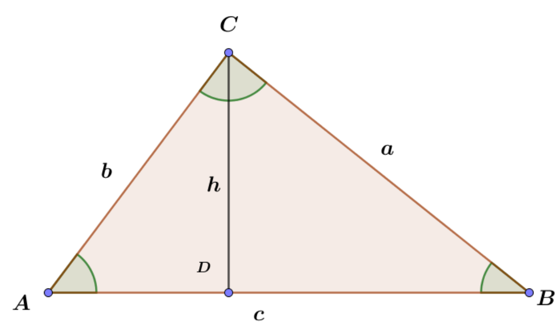
4: Se conocen las medidas de dos lados del triángulo y el ángulo comprendido entre ellos (LAL).

Para la resolución de triángulos que corresponden a cualquiera de los dos primeros casos se resuelven mediante la ley de Senos, cabe destacar que los triángulos que se resuelven aplicando la ley de Senos en el caso 2 pueden tener única solución, dos soluciones o no tener solución.

7.1. LEY DE SENO

Dado un triángulo de lados a, b y c, cuyos ángulos opuestos son $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C$ respectivamente, se cumple que

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

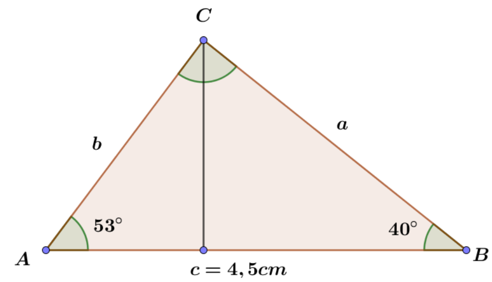


Para la aplicación de la ley de senos en la resolución de un triángulo, se debe tener en cuenta que la ecuación anterior nos indica proporcionalidad entre los elementos del triángulo. Por tanto, para utilizar la fórmula se deben conocer tres datos que relacionen las medidas de los ángulos con los lados opuestos correspondientes para calcular la medida de un cuarto elemento desconocido.

A continuación se muestran unos ejemplos de como resolver triángulos aplicando la ley de senos.

Ejemplo.

Resuelva el siguiente triángulo del cuál se conocen las medidas de dos ángulos y la longitud de uno de los lados.



Para solucionar este triángulo se debe listar los elementos conocidos y las incógnitas. Para este triángulo se tiene:
$\sphericalangle A = 53°$, $\sphericalangle B = 40°$, $c = 4,5cm$, $\sphericalangle C =?$, $a =?$ y $b =?$. Como se conoce la medida de dos ángulos entonces se puede calcular la medida del ángulo faltante así:

$$53° + 40° + \sphericalangle C = 180°$$

$$\sphericalangle C = 180° - 53° - 40° = 87°$$

por lo tanto el $\sphericalangle C = 87°$.
Ahora se calculará la longitud del lado a del triángulo. Así:

$$\frac{\operatorname{sen} 53°}{a} = \frac{\operatorname{sen} 87°}{4,5}$$

despejando a se obtiene

$$a = \frac{4,5 \operatorname{sen} 53°}{\operatorname{sen} 87°} \approx 3,6$$

Por lo tanto la longitud de $a = 3,6$ cm. Falta calcular entonces la longitud de b

$$\frac{\operatorname{sen} 40°}{b} = \frac{\operatorname{sen} 87°}{4,5}$$

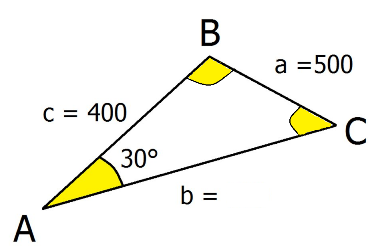
despejando b se obtiene

$$a = \frac{4,5 \operatorname{sen} 40°}{\operatorname{sen} 87°} \approx 2,9$$

Por lo tanto la longitud de $b = 2,9$ cm. De esta manera se ha resuelto el triángulo.

Ejemplo.

En el siguiente triángulo se conoce la medida de un ángulo y de dos de sus lados, Encuentre los tres elementos del triángulo faltantes.



Para solucionar este triángulo se debe listar los elementos conocidos y las incógnitas. Para este triángulo se tiene:
$\sphericalangle A = 30°$, $a = 500m$, $c = 400m$, $\sphericalangle B = ?$, $\sphericalangle C = ?$ y $b = ?$. Como se conoce la medida de dos lados y la medida de un ángulo se puede calcular la medida del ángulo $\sphericalangle C$. Así

$$\frac{\operatorname{sen} 30°}{500} = \frac{\operatorname{sen} C}{400}$$

se despeja el $\operatorname{sen} C$

$$\operatorname{sen} C = \frac{400 \operatorname{sen} 30°}{500}$$

$$\operatorname{sen} C = 0,4$$

Se utiliza la función inversa parra despejar el valor del ángulo.

$$C = \operatorname{arc\,sen}(0,4) \approx 23°$$

El ángulo $\sphericalangle C$ tiene una medida aproximada de 23°
Como se conoce la medida de dos de los ángulos entonces se puede calcular la medida del $\sphericalangle B$ así:

$$30° + 23° + \sphericalangle B = 180°$$

$$\sphericalangle B = 180° - 30° - 23° = 127°$$

La medida del ángulo $\sphericalangle B = 127°$. Por último, se debe calcular la longitud del lado b. Así:

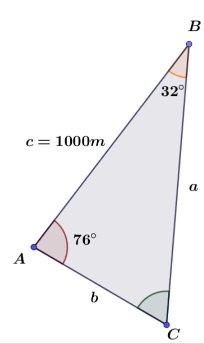
$$\frac{\operatorname{sen} 127°}{b} = \frac{\operatorname{sen} 30°}{500}$$

Al despejar b se obtiene

$$b = \frac{500 \operatorname{sen} 127°}{\operatorname{sen} 30°} = 798,6$$

La longitud del lado b es de 798, 6 metros. Como ya se conocen los seis elementos del triángulo entonces el triángulo queda resuelto.

Ejemplo
Encuentre las medidas de los elementos faltantes para el siguiente triángulo oblicuángulo.



Solución.
Para solucionar este triángulo lo primero que se debe calcular es la medida del ángulo desconocido, Así:

$$76^\circ + 32^\circ + \sphericalangle C = 180^\circ$$

$$\sphericalangle C = 180^\circ - 76^\circ - 32^\circ = 72^\circ$$

Por lo tanto, la medida del ángulo $\sphericalangle C$ es de 72°. Se aplica la ley de Seno para calcular la longitud del lado a. Así:

$$\frac{\operatorname{sen} 72^\circ}{1000} = \frac{\operatorname{sen} 76^\circ}{a}$$

$$a \operatorname{sen} 72^\circ = 1000 \operatorname{sen} 76^\circ$$

$$a = \frac{1000 \operatorname{sen} 76^\circ}{\operatorname{sen} 72^\circ} \approx 1020,22$$

La longitud del lado a es aproximadamente de $1020,22$ metros.
Por último se aplica la ley de Seno para calcular la longitud del lado b.

$$\frac{\operatorname{sen} 32^\circ}{b} = \frac{\operatorname{sen} 72^\circ}{1000}$$

Despejando la incógnita b se obtiene

$$b = \frac{1000 \operatorname{sen} 32^\circ}{\operatorname{sen} 72^\circ} \approx 557,19$$

La longitud del lado b es aproximadamente de $557,19$ metros.
Como se conocen los seis elementos del triángulo dado, entonces el triángulo ha sido resuelto.

7.2. TALLER

1. ”La ley de seno solo se puede aplicar en triángulos no rectángulos”. La afirmación anterior es

A Verdadera, ya que $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$ y esta cifra no altera la proporcionalidad entre los elementos del triángulo.

B Verdadera, ya que la ley de seno indica proporcionalidad entre los elementos de un triángulo y esta proporcionalidad no se afecta.

C Falsa, ya que $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$ y esta cifra altera la proporcionalidad entre los elementos del triángulo.

D Falsa, ya que la ley de seno indica proporcionalidad entre los elementos de un triángulo y esta proporcionalidad se afecta cuando hay un ángulo recto.

2. Si los lados de un triángulo son a, b y c, y los ángulos opuestos son $\sphericalangle A$,$\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C$ respectivamente, entonces se cumple que $a \operatorname{sen} A = b \operatorname{sen} B$. Esta proposición es

A Verdadera, ya que a partir de la ley de seno se puede obtener la expresión $a \operatorname{sen} A = b \operatorname{sen} B$.

B Falsa, ya que a partir de la ley de seno No se puede obtener la expresión $a \operatorname{sen} A = b \operatorname{sen} B$.

C Verdadera, ya que la ley de senos expresa la proporcionalidad en el producto.

D Falsa, ya que la ley de seno expresa proporcionalidad en forma de razón.

3. Si los ángulos $\sphericalangle A$, y $\sphericalangle B$ son complementarios, y a y b son lados opuestos respectivamente, entonces se cumple que: $b \cos B = a \operatorname{sen} B$. Esta proposición es

A Verdadera, ya que la ley de senos se cumple para todos los triángulos.

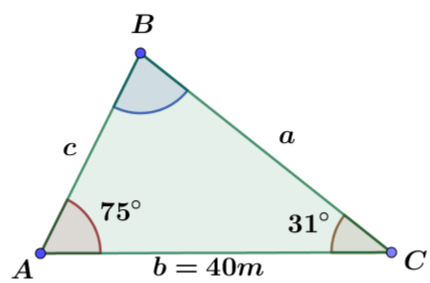
B Falsa, ya que la ley de senos es solo para triángulos oblicuángulos.

C Verdadera, ya que en la expresión de la ley de senos se puede reemplazar la relación para razones trigonométricas de ángulos complementarios.

D Falsa, ya que esta mal planteada la relación para razones trigonométricas de ángulos complementarios.

Responda las preguntas 4 y 5 en base a la siguiente información.

En el examen de trigonometría de Sebastián le piden contestar un par de preguntas en base al siguiente triángulo.



4. La medida del ángulo $\sphericalangle B$ es igual a

A 74°

B 47°

C 80°

D 100°

5. la longitud del lado c es

A $c \approx 21,4$ m

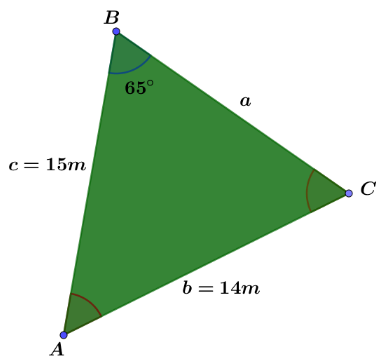
B $c = 21$ m

C $c = 12$ m

D $c = 20$ m

Responda las preguntas 6-8 en base a la siguiente información.

Un granjero tiene una sección triangular como se muestra en la imagen para realizar un siembro de zanahorias.



6. La medida del ángulo $\sphericalangle C$ es

A $\sphericalangle C = 67°$

B $\sphericalangle C = 76°$

C $\sphericalangle C \approx 67°$

D $\sphericalangle C \approx 76°$

7. La medida del ángulo $\sphericalangle A$ es

A $\sphericalangle A = 39°$

B $\sphericalangle A = 93°$

C $\sphericalangle A \approx 39°$

D $\sphericalangle A \approx 93°$

8. para proteger el cultivo de roedores va a realizar un cercado. ¿ Cuántos metros de malla debe comprar para cercar el cultivo?

A 38 metros

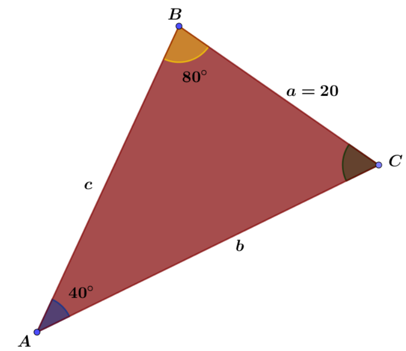
B 83 metros

C Aproximadamente $38,72$ metros

D Aproximadamente $83,72$ metros

Responda las preguntas 9 a 11 de acuerdo a la siguiente información.

Se tiene un triángulo oblicuángulo como el de la figura.



9. A que caso pertenece el triangulo de la imagen si se desea resolver.

A Caso 1; LAA

B Caso 1: ALA

C Caso 2: LLA

D Caso 4; LAL

10. La medida del ángulo $\sphericalangle C$ es de

A $\sphericalangle C = 60°$

B $\sphericalangle C = 80°$

C $\sphericalangle C = 70°$

D $\sphericalangle C = 50°$

11. La longitud del lado b es de

A $b \approx 30,6$ m

B $b = 30,6$ m

C $b \approx 29$ m

D $b \approx 31,6$ m

LOGROS:

- ∗ Utiliza las funciones trigonométricas para resolver triángulos oblicuángulos.
- ∗ Resuelve problemas que involucran la solución de triángulos oblicuángulos.

Capítulo 8

Solución de triángulos Oblicuángulos

En la sesión anterior se mostró la aplicación de las funciones trigonométricas a la hora de resolver triángulos oblicuángulos, se reconocen cuatro posibles casos a la hora de resolver un triángulo, los dos primeros casos hacen uso de la ley de seno. En la presente Sesión se van a trabajar los últimos dos casos para resolver un triángulo, y para esto se utilizara lo que se denomina como ley de coseno.

8.1. LEY DE COSENO

Para todo triángulo de de lados a, b y c, cuyos ángulos opuestos son $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C$ respectivamente, se cumple que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

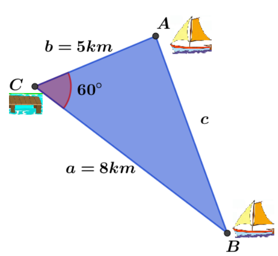
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Las tres igualdades anteriores se conocen como la ley del coseno, y permiten resolver triángulos cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos o cuando se conocen los tres lados del triángulo.

Una particularidad es que el teorema de Pitágoras resulta ser un caso particular de la ley del coseno. A continuación se muestran unos ejemplos que indican como resolver triángulos aplicando la ley de Seno.

Ejemplo.
Dos barcos A y B , están anclados al muelle ubicado en el punto C, desde el muelle se observan ambos barcos de modo que la medida del ángulo $\sphericalangle ACB$ es de $60°$, el barco A se encuentra una distancia de 5 km del puerto; además el barco B se encuentra a 8 km del puerto. Resuelva el triángulo formado por los barcos y el puerto.



Para solucionar el triángulo se puede iniciar encontrando la longitud del lado c, para ello se utiliza la tercera igualdad de la ley de coseno. Así:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

reemplazando los datos se obtiene

$$c^2 = (8)^2 + (5)^2 - 2(8)(5)\cos 60°$$

$$c^2 = 64 + 25 - 80\cos 60°$$

$$c^2 = 49$$

$$c = 7$$

La distancia entre los barcos es de 7 km.

Ya se tienen las medidas de los lados del triángulo, ahora se ha de calcular la medida de los ángulos. primero se calculara la medida del ángulo $\sphericalangle A$. Así:

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A$$

Como se quiere encontrar la medida del ángulo $\sphericalangle A$ entonces se despeja $\cos A$ obteniendo:

$$\cos A = -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$$

Reemplazando los datos conocidos se tiene

$$\cos A = -\frac{(8)^2 - (5)^2 - (7)^2}{70}$$

$$\cos A = -\frac{64 - 25 - 49}{70}$$

$$\cos A = -\left(\frac{-10}{70}\right)$$

$$\cos A = \frac{1}{7}$$

Se aplica la función inversa para encontrar el valor del ángulo A

$$A = \arccos\frac{1}{7} \approx 81^\circ$$

Como se tienen dos ángulos del triángulo entonces para finalizar se calcula la medida del tercer ángulo. Entonces:

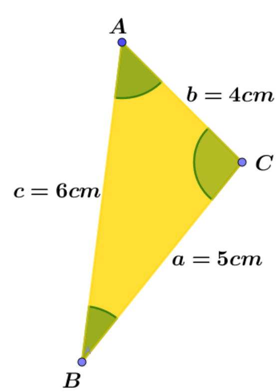
$$60^\circ + 81^\circ + \sphericalangle B = 180^\circ$$

$$\sphericalangle B = 180^\circ - 60^\circ - 81^\circ = 39^\circ$$

El ángulo C mide 39°. Como se conoce los seis elementos del triángulo entonces el triángulo ha sido resuelto.

Ejemplo.

En un jardín infantil los niños cuentan con una arenera triangular para jugar, de la arenera se conoce las medidas de los lados y se desea calcular las medidas de los ángulos internos del triángulo.



Primera se halla la medida del ángulo A aplicando la primera igualdad de la ley de coseno, Así:

$$\cos A = -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$$

Sustituyendo las medidas conocidas se tiene que

$$\cos A = -\frac{(5)^2 - (4)^2 - (6)^2}{2(4)(6)}$$

$$\cos A = -\frac{25 - 16 - 36}{48}$$

$$\cos A = -\frac{-27}{48}$$

Simplificando y aplicando la función inversa se tiene

$$A = \arccos\left(\frac{27}{48}\right) \approx 55^\circ$$

Ahora se ha de calcular el valor del ángulo B. De manera similar se despeja el $\cos B$.

$$\cos B = -\frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac}$$

Sustituyendo los valores se obtiene

$$\cos B = -\frac{(4)^2 - (5)^2 - (6)^2}{2(5)(6)}$$

$$\cos B = -\frac{16 - 25 - 36}{60}$$

$$\cos B = \frac{45}{60}$$

$$B = \arccos\left(\frac{45}{60}\right) \approx 41^\circ$$

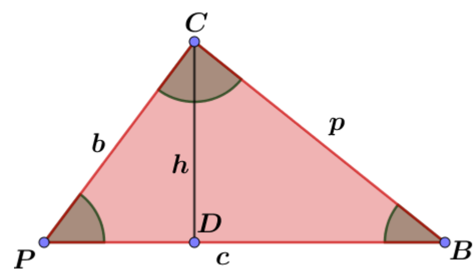
El ángulo B tiene una medida aproximada de 41°.
Por último, se calcula la medida del ángulo C.

$$55^\circ + 41^\circ + \sphericalangle C = 180^\circ$$

$$\sphericalangle C = 180^\circ - 55^\circ - 41^\circ = 84^\circ$$

Como se calcularon los seis elementos del triángulo entonces el triángulo que forma la arenera de juegos ha sido resuelto.

8.2. ÁREA DE UN TRIÁNGULO



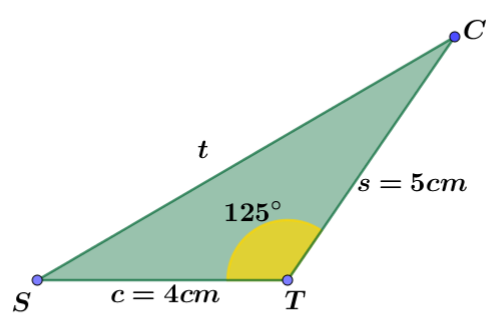
Se ha visto que las funciones trigonométricas tienen su aplicabilidad en la resolución de triángulos, pero además de esto, se puede determinar el área de un triángulo a partir de funciones trigonométricas.
Si se conocen las medidas de dos lados del triángulo y la medida del ángulo comprendido entre ellos se puede calcular el área del triángulo con la siguiente expresión.

$$A = \frac{bc \operatorname{sen} P}{2}$$

Equivalentemente se puede calcular el área de un triángulo con las siguientes expresiones

$$A = \frac{cp \operatorname{sen} B}{2} \qquad ; \qquad A = \frac{pb \operatorname{sen} C}{2}$$

Ejemplo.
Determine el área del triángulo que se muestra en la figura.



Se sustituyen los datos en la expresión. Así:

$$A = \frac{cs \operatorname{sen} T}{2}$$

$$A = \frac{(4)(5) \operatorname{sen} 125°}{2} = 8,19$$

Por tanto, el área del triángulo dado es de $8,19cm^2$

8.3. TALLER

A continuación encontrará un taller que contiene preguntas abiertas y preguntas de selección múltiple. 1. Dos remolques están separados por 36 metros tiran de un contenedor. Sí la longitud de uno de los cables es de 64m y la otra es de 69m. Para poder calcular los ángulos que se forman entre ellos se aplica.

A El teorema del seno, porque conocemos los tres lados.

B El teorema del coseno, porque conocemos tres lados.

C El teorema del coseno, porque conocemos dos lados.

D El teorema del seno, porque conocemos dos lados.

2. Para que un triángulo pueda ser resuelto con el teorema del coseno debe cumplir una de las siguientes condiciones.

A Conocer dos lados y un ángulo comprendido entre ellos.

B Conocer dos ángulos y un lado.

C Conocer los tres lados

D Conocer dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos

3. Si un triángulo isósceles tiene por medida de su base 22 cm y la medida del ángulo opuesto a la base es de 36°. Para encontrar el perímetro del triángulo se debe

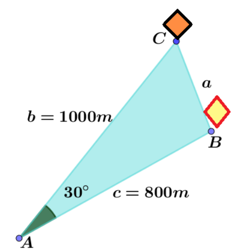
A Determinar el lado que falta aplicando el teorema del coseno y luego sumar los tres lados.

B Determinar el lado que falta aplicando el teorema del seno y luego sumar los tres lados.

C Determinar los ángulos que faltan aplicando el teorema del seno y luego sumarlos.

D Determinar los ángulos que faltan aplicando el teorema del coseno y luego sumarlos.

4. Una persona sostiene dos cometas que están volando, a unas de las cometas le ha soltado 1000 metros de cuerda y a la otra 800 metros. Si el ángulo que forman ambas cuerdas es aproximadamente de 30°.



La expresión que permite calcular la distancia de una cometa a la otra es:

A $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 30°$

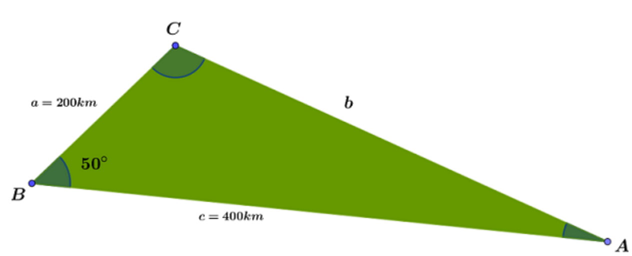
B $a^2 = b^2 + a^2 - 2bc\cos 30°$

C $b^2 = a^2 + c^2 - 2bc\cos 30°$

D $a^2 = b^2 + a^2 + 2bc\cos 30°$

De acuerdo a la siguiente información responda las preguntas 5, 6 y 7.

Un avión vuela de la ciudad A hacia la ciudad B a una distancia de 400 km, Luego gira con un ángulo de 50° dirigiéndose hacia la ciudad C a una distancia de 200 km.



5. La expresión que permite calcular la distancia entre la ciudad A y la ciudad C es:

A $b^2 = a^2 + c^2 - 2bc\cos 50°$

B $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 50°$

C $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 50°$

D $a^2 = b^2 + c^2 - 2ac\cos 50°$

6. El ángulo de giro necesita dar el avión si al llegar a la ciudad C debe regresar a la ciudad A es:

A $\sphericalangle C = 79°$

B $\sphericalangle C = 97°$

C $\sphericalangle C = 80°$

D $\sphericalangle C = 70°$

7. Si el vuelo inicial del avión se dirigiera desde la ciudad A hacia la ciudad c, Cuál sería el valor del ángulo A.

A $\sphericalangle A = 15°$

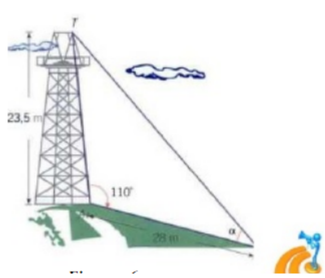
B $\sphericalangle A = 50°$

C $\sphericalangle A = 51°$

D $\sphericalangle A = 60°$

De acuerdo a la siguiente información responda las preguntas 8 y 9.

Una torre de 23 m de altura forma un ángulo de 110° con respecto a una loma, si una persona se ubica a 28 m de la base de la torre.



8. El ángulo de elevación desde el punto que se encuentra ubicada la persona y la parte más alta de la torre sería

A $\sphericalangle A = 15°$

B $\sphericalangle A = 30°$

C $\sphericalangle A = 31°$

D $\sphericalangle A = 60°$

9. La distancia desde el observador hasta la parte más alta de la torre es

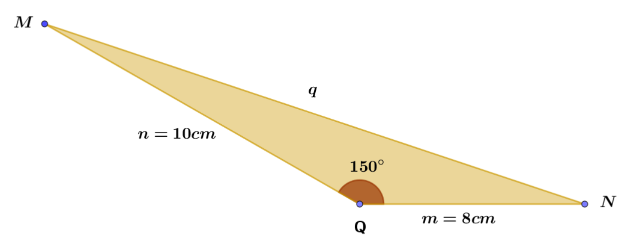
A $c = 41,87$ m

B $c = 40,87$ m

C $c = 51,87$ m

D $c = 61,87$ m

10. El área del siguiente triángulo es:



A $A = 37,5m^2$

B $A = 35,5m^2$

C $A = 37,8m^2$

D $A = 47,5m^2$

LOGROS:

- ∗ Reconoce las identidades trigonométricas básicas y las emplea para simplificar expresiones.
- ∗ Demuestra identidades trigonométricas.
- ∗ interpreta y usa las identidades de la suma y la diferencia de ángulos.

Capítulo 9

Identidades Trigonométricas.

Las identidades trigonométricas se comienzan a desarrollar en Grecia, desde los mismo orígenes de la trigonometría. Los primeros trabajos relacionados con las identidades trigonométricas se remontan a Hiparco, Menelao y Ptolomeo; cuyos escritos sobre trigonometría muestran el desarrollo de identidades que guardan relación con las que se conocen hoy en día.
Ptolomeo, escribió la obra sobre trigonometría más importante de la antigüedad, esta obra estaba compuesta por trece libros y se llamaba *Sintaxis Matemática*, y por su importancia y trascendencia años más tarde fue denominada por los árabes como "*Almagesto*" que traduce "El más grande".
Más adelante, aproximadamente en el año 1571 d.c el matemático Joseph Fourier propone una serie con expresiones trigonométricas, que luego permitirían descomponer diferentes frecuencias de las ondas electromagnéticas. En el siglo XVIII, Leonard Euler relaciona las funciones trigonométricas con los números complejos, asociando a cada número complejo una expresión trigonométrica denominada forma polar.

9.1. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS.

Una identidad es una igualdad entre dos expresiones que contienen una o varias variables, y qué es válida para todo valor de la variable. Por ejemplo, las igualdades $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ son identidades.

Aquellas identidades en las que se establecen relaciones entre las funciones trigonométricas se denominan **Identidades Trigonométricas**.

9.2. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES.

Existen identidades trigonométricas que se pueden construir a partir de las relaciones geométricas básicas, estas identidades permiten transformar expresiones existentes en otras equivalentes. A éstas se les denomina **Identidades trigonométricas fundamentales.**
Las identidades trigonométricas fundamentales se pueden clasificar en tres categorías que son: las identidades pitagóricas, identidades recíprocas e identidades de razón.
A continuación se muestra cuales son las identidades trigonométricas fundamentales y las ecuaciones que las relacionan.

CATEGORÍA	IDENTIDADES	
Pitagóricas	$Sen^2x + Cos^2x = 1$ $tan^2x + 1 = Sec^2x$ $cot^2x + 1 = csc^2x$	
Recíprocas	$senx = \frac{1}{cscx}$	$cscx = \frac{1}{senx}$
	$cosx = \frac{1}{secx}$	$secx = \frac{1}{cosx}$
	$tanx = \frac{1}{cotx}$	$cotx = \frac{1}{tanx}$
Razón entre dos funciones	$tanx = \frac{senx}{cosx}$	$cotx = \frac{cosx}{senx}$

9.3. SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Las identidades trigonométricas fundamentales permiten transformar expresiones trigonométricas complicadas, en expresiones más sencillas pero equivalentes.

Ejemplo.
Escribir la expresión trigonométrica $\frac{\csc x - \operatorname{sen} x}{\cot x}$ en términos de $\cos x$.
Para resolver la expresión trigonométrica dada se utilizarán las identidades trigonométricas fundamentales. Así:

$$\frac{\csc x - \operatorname{sen} x}{\cot x}$$

De las identidades fundamentales en la tabla se tiene que $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ y $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, sustituyendo se obtiene

$$= \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

Se realiza las operaciones indicadas

$$= \frac{\frac{1 - sen^2 x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

se simplifican la expresión

$$\frac{1 - \operatorname{sen}^2}{\cos x}$$

de la primera identidad pitagórica se tiene que

$$\frac{\cos^2}{\cos x} = \cos x$$

Por lo tanto, la expresión $\frac{\csc x - \operatorname{sen} x}{\cot x} = \cos$.

Ejemplo.
Expresar $\tan^2 x - \cot^2 x$ en términos de $\operatorname{sen} x$

$$\tan^2 x - \cot^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

De la primera identidad pitagórica se tiene que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, Por tanto

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} - \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

se opera y simplifica la expresión para encontrar la expresión equivalente.

$$= \frac{2 \operatorname{sen}^2 x - 1}{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x}$$

Es muy importante para el desarrollo de las identidades trigonométricas tener en cuenta los casos de factorización más importantes. A continuación se presenta una tabla con los casos de factorización que más se aplican en esta sesión.

Casos de Factorización	
Factor Común	$ax^2 + ax - ay = a(x^2 + x - y)$
Diferencia de Cuadrados	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
Suma o Diferencia de Cubos	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

9.4. DEMOSTRACIÓN DE UNA IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA

Demostrar una identidad trigonométrica consiste en transformar los miembros de la igualdad para mostrar que estos son iguales.

Para demostrar una identidad existen muchas posibilidades para hacerlo, sin embargo, a continuación se muestra un posible paso a paso que permite demostrar identidades trigonométricas de forma sencilla.

- Se debe tomar el miembro de la igualdad que tenga más términos o que parezca más complicado, dado que se desea transformar hasta llegar al segundo miembro de la igualdad.
- Luego de elegir el miembro más complicado de la igualdad, éste se debe reescribir en términos de senos y cosenos utilizando las identidades trigonométricas fundamentales.
- Realizar las operaciones indicadas, Sumas, restas o factorización; esto con el fin de simplificar lo más posible la expresión.
- Finalmente, luego de simplificar la expresión en la mayoría de casos se debe utilizar nuevamente las identidades trigonométricas fundamentales para llegar al segundo miembro de la igualdad.
- En algunas ocasiones no se puede llegar de un lado de la igualdad al otro de manera directa, para estos casos lo conveniente es transformar ambos lados de la igualdad hasta obtener la igualdad entre las dos expresiones.

A continuación se presentan unos ejemplos de como se demuestra una identidad trigonométrica.

Ejemplo.

Demostrar si la relación $\sec x = \operatorname{sen} x \cdot (\tan x + \cot x)$ es una identidad trigonométrica.
Para verificar si esa relación es efectivamente una identidad trigonométrica se realiza el siguiente procedimiento. Primero, se identifica el miembro de la igualdad que parece más complicado, en este caso resulta ser el miembro derecho de a igualdad ya que tiene mas términos.

$$\sec x = \operatorname{sen} x \cdot (\tan x + \cot x)$$

Segundo, el miembro del lado derecho de la igualdad se reescribe en términos de senos y cosenos.

$$\sec x = \operatorname{sen} x \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)$$

Tercero, se realiza la suma indicada dentro del paréntesis.

$$\sec x = \operatorname{sen} x \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} \right)$$

Por identidad pitagórica fundamental se tiene que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, sustituyendo se obtiene

$$\sec x = \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

Se simplifica la expresión

$$\sec x = \cancel{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\cancel{\operatorname{sen} x} \cos x}$$

Por identidad recíproca se tiene que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, Por lo tanto

$$\sec x = \sec x$$

Con lo que se comprueba que efectivamente la relación $\sec x = \operatorname{sen} x \cdot (\tan x + \cot x)$ es una identidad trigonométrica.

Ejemplo.
Verificar si la relación $\frac{\sec t}{\cos t} - \frac{\tan t}{\cot t} = 1$ es una identidad trigonométrica.
Solución.
En este caso, el miembro de la igualdad que contiene más términos es el del lado izquierdo.

$$\frac{\sec t}{\cos t} - \frac{\tan t}{\cot t} = 1$$

reescribimos en términos de senos y cosenos.

$$\frac{\frac{1}{\cos t}}{\cos t} - \frac{\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}}{\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}} = 1$$

se simplifica y se realiza la resta de fracciones

$$\frac{1-\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2} =$$

Se sustituye la primera identidad pitagórica y se simplifica así

$$\frac{\cancel{\cos^2 t}}{\cancel{\cos^2 t}} = 1$$

llegando a concluir que $1 = 1$, Por tanto la relación $\frac{\sec t}{\cos t} - \frac{\tan t}{\cot t} = 1$ es una identidad pitagórica.

Ejemplo.
Demostrar que la igualdad $\csc x - \operatorname{sen} x = \cos x \cot x$ es una identidad trigonométrica.
Solución.
Como en este caso ambos miembros de la igualdad presentan varios términos diferentes a senos y cosenos entonces se ha de modificar ambos miembros de la igualdad de manera simultanea.

$$\csc x - \operatorname{sen} x = \cos x \cot x$$

Reescribimos todo en términos de seno y coseno

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x = \cos x \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Se realizan las operaciones indicadas a ambos lados de la igualdad.

$$\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}}$$

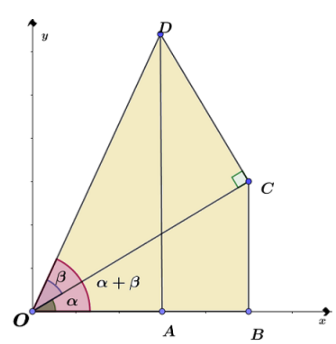
Se sustituye la identidad pitagórica en el lado izquierdo de la igualdad. Así

$$\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

Como se obtiene una igualdad entonces la relación $\csc x - \operatorname{sen} x = \cos x \cot x$ es una identidad trigonométrica.

9.5. IDENTIDADES PARA LA SUMA DE ÁNGULOS.

Cuando se tienen dos ángulos en posición canónica como los de la gráfica se pueden establecer identidades trigonométricas que relacionan la suma de los ángulos.



Seno de la suma de dos ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Coseno de la suma de dos ángulos

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Tangente de la suma de dos ángulos

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

9.6. IDENTIDADES PARA LA DIFERENCIA DE ÁNGULOS.

Si se toma que $\beta=-\beta$ y se sustituye en las identidades para la suma de dos ángulos, además teniendo en cuenta que las funciones seno y tangente son funciones impares y que la función coseno es función par se tienen las siguientes identidades para la diferencia de dos ángulos.

Seno de la diferencia de dos ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Coseno de la diferencia de dos ángulos

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Tangente de la diferencia de dos ángulos

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

9.7. IDENTIDADES PARA ÁNGULOS DOBLES.

Nuevamente, partiendo de las identidades para la suma de dos ángulos, si se sustituye $\beta=\alpha$ se obtiene las siguientes identidades para ángulos dobles.

Seno del ángulo doble.

$$\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$$

Coseno del ángulo doble

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$$

Tangente del ángulo doble

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

9.8. TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTOS EN SUMAS Y DIFERENCIAS

A partir de las identidades para la suma y la diferencia de ángulos se pueden encontrar unas nuevas identidades trigonométricas que transforman productos de funciones seno y coseno de dos ángulos en sumas o diferencia. Estas identidades son:

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

9.9. TALLER

Demuestre las siguientes identidades.
1. $\csc x - \operatorname{sen} x = \cot x \cdot \cos x$
2. $\operatorname{sen} x + \cos x \cdot \cot x = \csc x$
3. $\cos t(\tan t + 1) = \operatorname{sen} t + \cos t$

4. $\frac{\tan x}{\operatorname{sen} x} + \csc x \cot x = \sec x \csc^2 x$

5. $\cos x(\sec x - \operatorname{sen} x \tan x) = \cos^2 x$
6. $(\tan u + \cot u)(\cos u + \operatorname{sen} u) = \csc u + \sec u$
7. $(1 + \csc x)(1 - \operatorname{sen} x) = \cot x \cos x$
8. $\cos^4 t - \operatorname{sen}^4 t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$ 9. $\tan^4 x - \sec^4 = 1 - 2\sec^2 x$

10. $4\cot x \csc x = \frac{1+\cos x}{1-\cos x} - \frac{\csc x - \cot x}{\csc x + \cot x}$

Encuentre la expresión que representa m y hace verdadera las identidades.
11. $(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 = 1 + m$
12. $\sec^2 t + \tan^2 t = (1 - \operatorname{sen}^4 t) \cdot m$
13. Señale las proposiciones verdaderas.

- la igualdad $\cot = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ es una identidad recíproca.
- la igualdad $\cos x \cdot \sec x = 1$ es una identidad de razón.
- la igualdad $\tan x \cdot \cot x = 1$ es una identidad recíproca
- la igualdad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ es una identidad pitagórica.
- la igualdad $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$ es una identidad de razón.

14. Al simplificar la expresión

$$\tan x \operatorname{sen} x \cos x \csc x$$

se obtiene

A 1

B $\cot x$

C $\tan x$

D $\operatorname{sen} x$

15. Después de reducir la expresión

$$\cos^3 x \sec^2 x$$

se obtiene

A $\cos x$

B $\cot x$

C $\tan x$

D $\operatorname{sen} x$

16. Después de reducir la expresión

$$\operatorname{sen}^2 x \csc x$$

se obtiene

A $\cos x$

B $\cot x$

C $\tan x$

D $\operatorname{sen} x$

17. Después de reducir la expresión

$$\operatorname{sen} x \cot x$$

se obtiene

A $\cos x$

B $\cot x$

C $\tan x$

D $\operatorname{sen} x$

LOGROS:

* Reconoce la distancia entre dos puntos en el plano.
* Reconoce las posiciones de dos rectas en el plano.
* Determina la ecuación canónica y general de la recta.

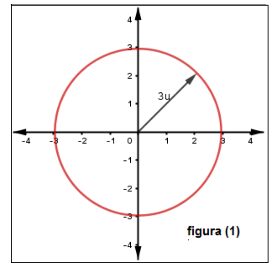
Capítulo 10

La línea recta

La línea recta es una sucesión continua de puntos extendidos en una sola dirección, también se puede describir como una línea que se extiende en una misma dirección por tanto tiene una sola dimensión y contiene un número infinito de puntos.

10.1. LUGAR GEOMÉTRICO

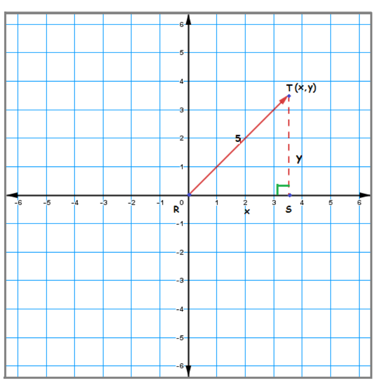
Observe que en la siguiente figura (1) la distancia entre el conjunto de puntos con el origen del plano es de 3 unidades, esta distancia se le conoce como un lugar geométrico y a partir de la característica común que poseen los puntos que pertenecen al lugar geométrico podemos deducir la ecuación de un lugar geométrico



La ecuación de un lugar geométrico a la expresión algebraica que de forma analítica establece la relación entre las coordenadas de cada punto en el plano, esta ecuación sólo se satisface con las coordenadas de cada uno de los puntos de un lugar geométrico. Para hallar la ecuación de un lugar geométrico primero se debe considerar un punto cualesquiera $P(x, y)$ que cumpla las propiedades de lugar geométrico y segundo, exprese algebraicamente mediante igualdades que relacionen las variables x y y

Ejemplo: Hallar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que se encuentran a 5 unidades del punto $(0, 0)$ y construya la gráfica.

Solución:
1. sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico
2. Para establecer la relación entre las variables x y y de cada punto del lugar geométrico, se construye la siguiente figura

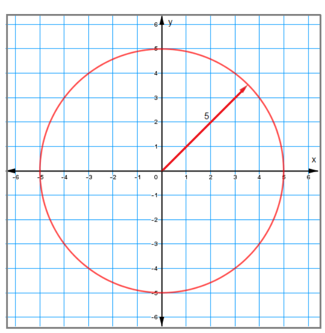


De acuerdo al al trángulo rectángulo $\overline{RT} = 5$ unidades,$\overline{RS} = x$ y $\overline{ST} = y$. Luego aplicando el teorema de Pitágoras

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

Es decir, el lugar geométrico tiene la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ y su gráfica corresponde a una circunferencia de radio 5, con centro en $(0, 0)$



10.2. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ del plano se denota de la forma $d(P, Q)$ y esta dada por la fórmula

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo: Hallar la distancia entre los puntos $P(4, 2)$ y $Q(-5, -3)$

Solución:
Sea $P(4, 2) = (x_1, y_1)$ y $Q(-5, -3) = (x_2, y_2)$, reemplazando en la fórmula de las distancia entre dos puntos se obtiene:

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-5 - 4)^2 + (-3 - 2)^2} \\ &= \sqrt{(81) + (25)} \\ &= \sqrt{106} \cong 10,295 \end{aligned}$$

10.3. PENDIENTE DE LA RECTA

Sea θ el ángulo de inclinación de l, en sentido contrario de las manecillas del reloj con $\theta \neq 0$ (figura (2)), entonces, la pendiente m de la recta l se define como:

$$m = \tan \theta$$

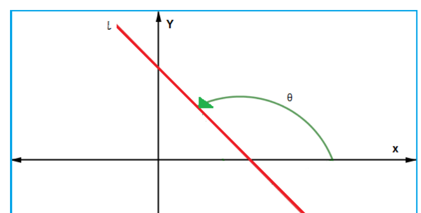


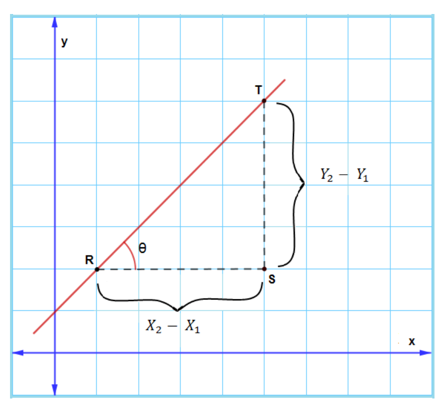
figura (2)

La pendiente de una recta se puede hallar conociendo dos puntos distintos de la recta l.

Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos distintos de la recta l donde $x_1 \neq x_2$ y sea θ el ángulo de inclinación de la recta como se muestra en la figura (3).
Si en el punto R con coordenadas (x_2, y_1) se traza una paralela al eje x y otra por el punto T que sea paralela al eje y, se forma el triángulo rectángulo RST, donde $\sphericalangle TRS = \theta$

Aplicando la definición de tangente en el triángulo RST se tiene que:

$$\tan \theta = \frac{\overline{ST}}{\overline{RS}}$$



De acuerdo a la figura (3) $\overline{ST} = (y_2 - y_1)$ y $RS = (x_2 - x_1)$, entonces:

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

La expresión $(y_2 - y_1)$ es llamada *el incremento en el eje* y y la expresión $(x_2 - x_1)$ es llamada *el incremento en el eje* x

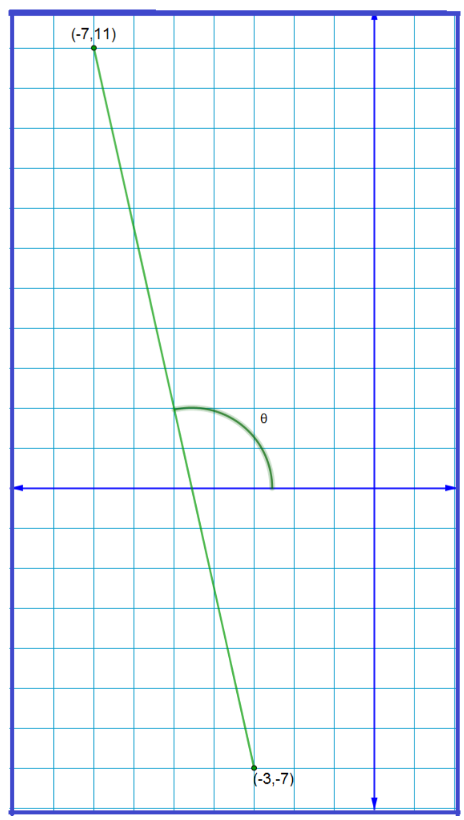
Ejemplo: La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-4, 7)$ y $(-7, 11)$ y el ángulo de inclinación de la recta es:

A) $m = \frac{3}{4}$ y $\theta = 110°11'37''$

B) $m = \frac{-3}{4}$ y $\theta = 29°52'6''$

C) $m = -\frac{4}{3}$ y $\theta = 126°52'11{,}6''$

D) $m = -\frac{4}{5}$ y $\theta = 126°11'65''$



Solución:
Aplicando la fórmula de la pendiente, se obtiene:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{11 - 7}{-7 - (-4)} \quad = \quad -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Y el ángulo de inclinación de la recta es:

$$\theta = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) \quad = \quad 126°52'11{,}6''$$

de acuerdo a este resultado, la respuesta correcta es **C**
$m = -\frac{4}{3}$ y $\theta = 126°52'11{,}6''$

10.4. ECUACIONES DE LA RECTA

10.4.1. Ecuación de la recta conociendo un punto y la pendiente

Sea l una recta con pendiente m que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y sea $Q(x, y)$ cualquier otro punto que pasa por l con $x \neq x_1$ entonces de la ecuación de la pendiente se tiene:

$$m = \frac{(y - y_1)}{(x - x_1)}$$

Despejando $(y - y_1)$ se tiene:

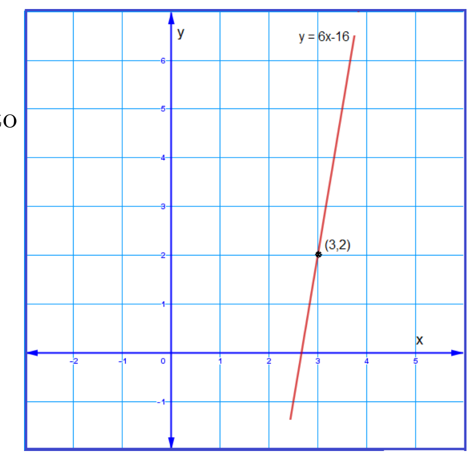
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esta ecuación es llamada *Ecuación punto-pendiente* o **Ecuación fundamental de la recta**

Ejemplo: La ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 2)$ y con pendiente 6 es:

$$y - 2 = 6(x - 3)$$

$$\text{se escribe} \quad y = 6x - 16$$



10.4.2. Ecuación de la recta conociendo dos de sus puntos

Para hallar la ecuación de la recta con los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$, primero se halla la pendiente $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$.

Luego se utiliza la ecuación de *punto-pendiente* utilizando las coordenadas de punto P o del punto Q.

Ejemplo: La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 5)$ y $(3, 7)$, es:
La pendiente se halla reemplazando

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad = \quad \frac{7 - 5}{3 - (-1)} \quad = \quad \frac{1}{2}$$

como $m = \frac{1}{2}$ y $(x_1, y_1) = (-1, 5)$. Ahora Utilizamos la ecuación de punto pendiente y se obtiene:

$y - 5 = \frac{2}{2}\left[x - (-1)\right]$ despejando y hallamos la ecuación correspondiente a esta recta $y = \frac{x}{2} + \frac{11}{2}$

10.4.3. Ecuación de la recta conociendo la pendiente y el intercepto con el eje y

Para hallar la ecuación de la recta l con pendiente m y si l corta al eje y en el punto $(0, b)$entonces b se denomina *intercepto de la recta*, con el eje y; luego aplicamos la ecuación punto-pendiente sustituyendo m y $(0, b) = (x_1, y_1)$, obteniendo:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - b = m(x - 0)$$

$y = mx + b$ esta eciación se conoce como *la ecuación pendiente-intercepto*

Ejemplo: La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 5)$ y $(3, 7)$, es:
La pendiente se halla reemplazando

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad = \quad \frac{7 - 5}{3 - (-1)} \quad = \quad \frac{1}{2}$$

como $m = \frac{1}{2}$ y $(x_1, y_1) = (-1, 5)$. Ahora Utilizamos la ecuación de punto pendiente y se obtiene:

$y - 5 = \frac{2}{2}\,[x - (-1)]$ despejando y hallamos la ecuación correspondiente a esta recta $y = \frac{x}{2} + \frac{11}{2}$

10.4.4. Ecuación canónica y ecuación general de la recta

La ecuación $y = mx + b$ es denominada la ecuación canónica de la recta cuya pendiente es m y el intercepto con el eje y es b.

La ecuación $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son números reales y se denomina ecuación general de la recta.

10.5. TALLER

1. La distancia entre los puntos $M(6,-1)$ y $N(2,7)$, es:

A) $\sqrt{14}$
B) $\sqrt[3]{80}$
C) 12
D) $\sqrt{80}$

2. Cuál (es) de las siguientes ecuaciones corresponde(n) a rectas de pendiente $-\frac{2}{3}$

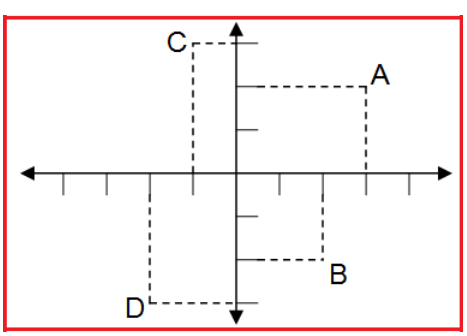
I. $2x+3y+5=0$
II. $3x-2y=0$
III. $4x+6y-12=0$

A) sólo I
B) sólo II
C) sólo III
D) I y III

3. Los puntos $M(3,7)$ y $N(-1,-1)$ pertenece a una misma recta. Un tercer punto posible de esta recta, es:

A) $(0,-1)$
B) $(-1,0)$
C) $(1,2)$
D) $(4,6)$

Resuelve las preguntas 4-8 de acuerdo a la siguiente grafica.



4. La pendiente de la recta que pasa por los puntos A y C, es:

A) $-1/4$
B) $1/5$
C) $1/4$
D) $-1/5$

5. La pendiente de la recta que pasa por los puntos B y D, es:

A) $-1/4$
B) $1/5$
C) $1/4$
D) $-1/5$

6. La pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B, es:

A) 3
B) 5
C) 4
D) 6

7. La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B, es:

A) $y=3x-10$
B) $y=4x-10$
C) $y=-3x+10$
D) $y=-4x+10$

8. La ecuación de la recta que pasa por los puntos C y D,es:

A) $y=3x+9$
B) $y=2x+9$
C) $y=5x+9$
D) $y=6x+9$

LOGROS:

* Reconoce las posiciones relativas de dos rectas en el plano.
* Reconoce las diferentes cónicas de acuerdo al corte del plano en un cono.
* Determina la ecuación canónica y general de la recta.Analiza la ecuación general de segundo grado.
*

Capítulo 11

Secciones cónicas

El estudio de las secciones cónicas surge por el matemático Apolonio aproximadamente en el siglo III, realizó una obra titulada *Las cónicas* de ocho libros en total sobre el estudio de estas figuras; además, introdujo por primera vez los conceptos de elipse, hipérbola y parábola.

Las cónicas describen trayectorias de diversos cuerpos del universo, desde cuerpos tan pequeños como los electrones de un átomo hasta los cúmulos de galaxias; actualmente los astrónomos aseguran que el curso de los planetas, de los cometas y de las galaxias es de forma elíptica o parabólica.

11.1. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL PLANO

11.1.1. Ángulo entre dos secantes

Sean l_1 y l_2 dos rectas cuyos ángulos de inclinación son θ_1 y θ_2, respectivamente. Por definición la pendiente de l_1 es $m_1 = \tan\theta_1$ y la pendiente de l_2 es $m_2 = \tan\theta_2$. Si l_1 y l_2 no son paralelas, éstas se cortan en un punto formando dos pares de ángulos opuestos por el vértice.

El ángulo θ formado de l_1 a l_2 en sentido contrario a las manecillas del reloj tiene una medida:

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Ejemplo: La medida correcta del ángulo de las recta $5x + 3y - 6 = 0$ a la recta$7x + 3y - 9 = 0$ es:

A) $42°38'$

B) $26°45'54{,}6''$

C) $19°50'5''$

D) $7°45'54{,}6''$

Solución:
Para la recta $5x + 3y - 6 = 0$ la pendiente es$m_1 = -\frac{5}{3}$

Para la recta $7x + 3y - 9 = 0$ la pendiente es $m_2 = -\frac{7}{3}$

Aplicando la fórmula para la tangente del ángulo se tiene

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \quad = \quad \frac{\left(-\frac{5}{3}\right) - \left(-\frac{7}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)} \quad = \quad \frac{9}{66}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{9}{66}\right) = 7°45'54{,}6''$$

la respuesta correcta es **D)** $7°45'54{,}6''$

11.1.2. Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas cuando sus pendientes son iguales.

Ejemplo: La ecuación de la recta que corta el eje x en 3, y es paralela a la recta $3x?4y = 4$ es:

A) $-4y + 3x - 10 = 0$
B) $-3y - 4x - 9 = 0$
C) $4y - 3x + 9 = 0$
D) $9y - 4x + 3 = 0$

Solución:
Se despeja y de la ecuación $3x?4y = 4$ obteniendo:

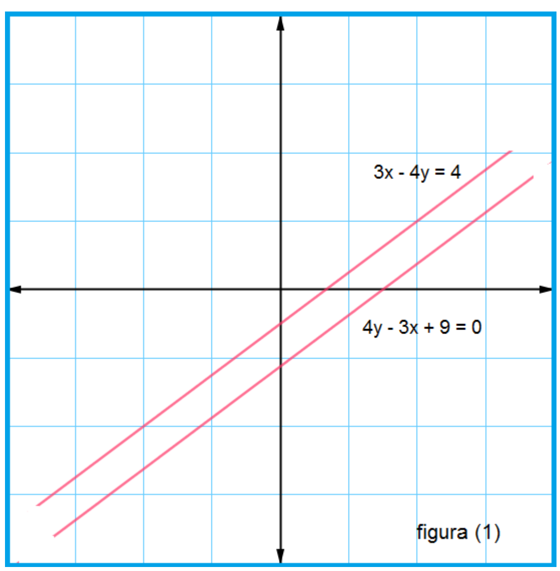
$$y = \frac{3}{4}x - 1 \quad \text{pendiente:} \quad m = \frac{3}{4}$$

Como la recta corta en eje x en 3,es decir, pasa por los puntos $(3, 0)$,éstos los reemplazo en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x - 3) \quad \Rightarrow \quad 4y = 3(x - 3)$$

$$\Rightarrow \quad 4y - 3x + 9 = 0$$

la respuesta correcta es **c)** $4y - 3x + 9 = 0$



11.1.3. Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares cuando el ángulo que se formas entre ellas es de 90° , además como $\tan 90°$ no esta definida, la ecuación $\frac{m_1 - m_2}{1+m_1 m_2}$, su denominador es igual a cero, es decir, $1+m_1 m_2 = 0$.

Luego, $m_1 \cdot m_2 = -1$, dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus pendientes es igual a -1.

Ejemplo: Cuál de las siguientes parejas de rectas son perpendiculares:

I. $l_1 : y = -\frac{3}{2}x + 4, \quad l_2 : y = \frac{3}{2}x + 4$

II. $l_1 : y = \frac{2}{3}x + 4, \quad l_2 : y = -\frac{3}{2}x - 13$

III. $l_1 : y = 4x + 6y - 12, \quad l_2 : y = \frac{1}{8}x + 7y + 1$

A) sólo I
B) sólo II
C) sólo III
D) I y III

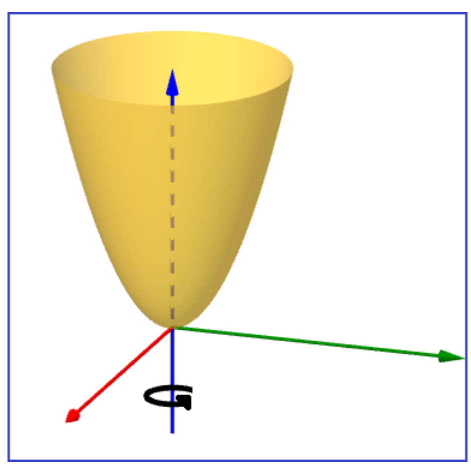
Solución:
I. l_1 y l_2 no son perpendiculares ya que $m_1 \cdot m_2 = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$ es decir, $m_1 \cdot m_2 \neq -1$

II. l_1 y l_2 son perpendiculares ya que $m_1 \cdot m_2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = -1$ es decir, $m_1 \cdot m_2 = -1$

III. l_1 y l_2 no son perpendiculares ya que $m_1 \cdot m_2 = (4) \cdot \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}$ es decir, $m_1 \cdot m_2 \neq -1$

11.2. SUPERFICIE CÓNICA DE REVOLUCIÓN

Una superficie de revolución es generada por una curva plana que se hace girar alrededor de una recta fija que se encuentra ubicada en el mismo plano de la curva.



Al hacer girar una recta alrededor de una recta fija, la superficie generada es un cono circular denominado *Superficie cónica de revolución*. La recta que gira se denomina *generatriz*, la recta fija se denomina *eje* y el punto de corte de las dos rectas se denomina *vértice*.

11.3. SECCIÓN CÓNICA

Una sesión cónica es una curva que se tiene al intersectar un plano con una superficie cónica de revolución. dependiendo cómo el plano corta la superficie cónica, la curva obtenida puede ser una circunferencia, una parábola, una elipse o una hipérbola.

11.4. ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Las secciones cónicas se pueden definir con la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{donde} \quad A, ByC \neq 0$$

En sesiones más adelante se planteará que en el plano cartesiano todas las secciones cónicas tienen una ecuación de segundo grado y además, la gráfica de una ecuación de segundo grado, puede ser una circunferencia, una parábola, elipse o hipérbola, o en su defecto, un punto, una recta o dos rectas que se cortan.

Ejemplo: Una posible solución de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$, es:
A)$x = -4$
B) $x = 2$
C) $x = 1$

Solución:

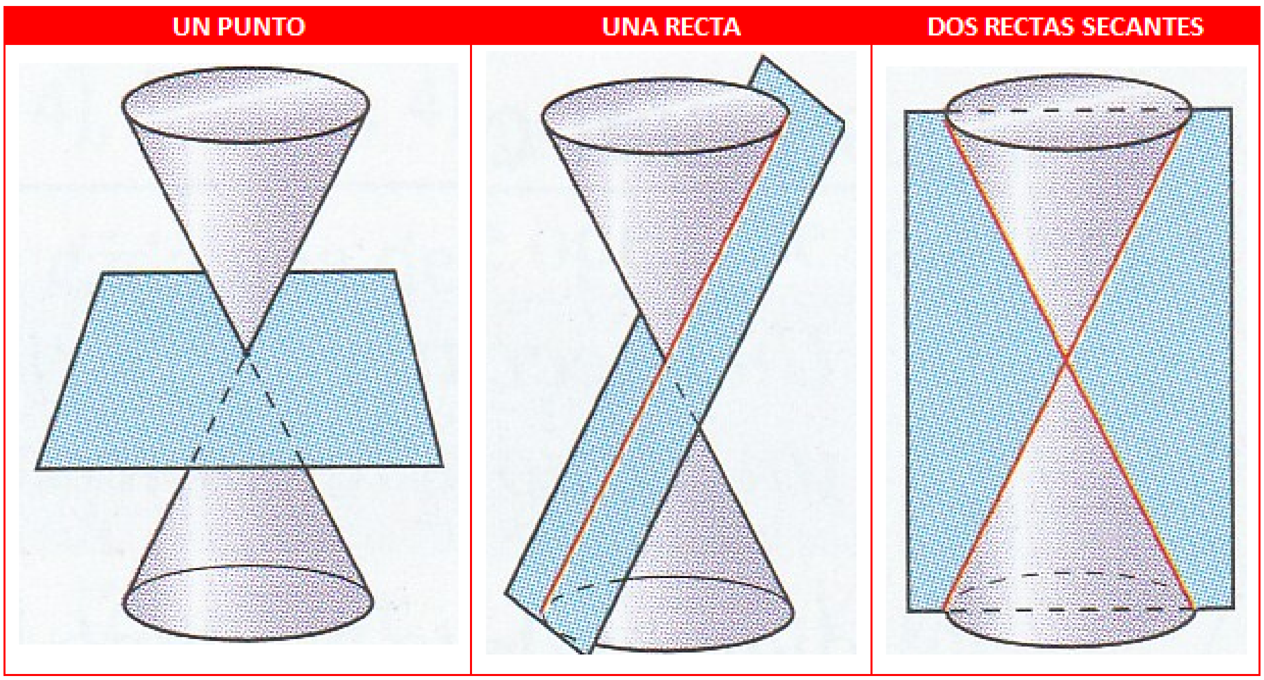
$*$El valor $x = 0$ no es solución, porque $(-4)^2 - 5(-4) + 6 = 13$, luego $13 \neq 0$

$*$El valor $x = 4$ es solución, porque $(2)^2 - 5(2) + 6 = 0$

$*$El valor $x = 1$ no es solución, porque $(1)^2 - 5(1) + 6 = 2$, luego $2 \neq 0$

11.5. CÓNICAS DEGENERADAS

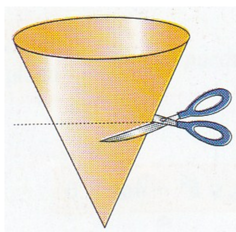
En la creación de las cónicas, el plano que corta el cono so pasa por el vértice; cuando esto sucede se obtienen *cónicas degeneradas*. Estas cónicas pueden ser un punto, una recta o dos rectas secantes.



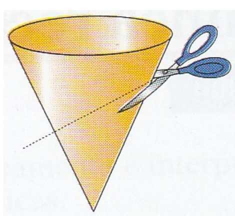
11.6. TALLER

1. Sugerencia metodológica: Solicite a los estudiantes que construyan previamente cuatro conos en cartulina y en clase, utilicen unas tijeras para realizar cortes en los conos de la siguiente manera:

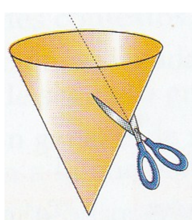
⋆ En el primer cono, realizar un corte paralelo a la base del cono.



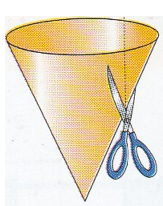
⋆ En el segundo cono, realizar un corte transversal la base del cono.



⋆ En el tercer cono, realizar un corte al lado del cono.



⋆ En el cuarto cono, realizar un corte paralelo a la altura del cono.



2. La ecuación de la recta que corta el eje x en 6 y es paralela a la recta que pasa por $(1, 2)$ y $(4, 5)$, es:

A) $y + x - 1 = 0$
B) $6y + x - 6 = 0$
C) $2y - 3x + 3 = 0$
D) $y - x + 6 = 0$

3. Determine la ecuación general de la recta que es perpendicular a la recta $3y - x - 4 = 0$ y pasa por el punto de intersección de las rectas $y - 3x = 1$ y $2y + 3x = 2$

A) $y + 3x + 1 = 0$
B) $y + x - 1 = 0$
C) $y - 3x + 3 = 0$
D) $y - x + -3 = 0$

4. Las rectas cuyas ecuaciones son $Ax+By+C = 0$ y $3x - 2y + 1 = 0$ son perpendiculares cuando:

A) a y b son reales arbitrarios y $c = 1$.
B) a y b son reales arbitrarios y $c = -1$
C) $3b - 2a = 0$ y c es cualquier real.
D) $3a - 2b = 0$ y c es cualquier real.

5.La diferencia entre el cuadrado de un número positivo y el sétulpo de dicho número es 16 unidades. El número correspondiente, es:

A) $x = 8$ y $x = -8$
B) $x = -2$ y $x = 2$
C) $x = 8$ y $x = -2$
D) $x = 5$ y $x = -64$

LOGROS:

* Comprende la definición de circunferencia y sus elementos.
* Analiza las diferentes ecuaciones de la circunferencia.
* Resuelve problemas reales que involucran la circunferencia

Capítulo 12

La circunferencia

La circunferencia ha causado gran fascinación, se ha identificado como el ciclo de la vida y de la muerte presentes en la naturaleza. También se ha llegado a representar como la forma de la divinidad porque se puede mostrar idéntica desde rotación que tenga.

la circunferencia pasó de ser motivo de inspiración de distintas religiones y manifestaciones de arte, a ser objeto de estudio de las matemáticas, se ha estudiado sus elementos, propiedades, sus medidas, entre otros.

12.1. ECUACIÓN CANÓNICA DE LA CIRCUNFERENCIA

Una circunferencia es el conjunto de puntos que se encuentran a una distancia constante de un punto fijo conocido como centro. La distancia entre cada punto y el centro se denomina radio.
Sea la circunferencia de radio r y con centro en el punto $C(a,b)$, la ecuación canónica tiene la expresión:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

si $C(a,b)=(0,0)$, la ecuación canónica de la circunferencia es:

$$x^2+y^2=r^2$$

Ejemplo: **1.** Determine si cada punto los puntos $P_1(4,-1)$ y $P_2(1,-3)$ pertenecen o no a la circunferencia $(x+2)^2+(y-1)^2=25$
Solución:

• Para el punto $P_1(5,-3)$, reemplazando en la ecuación canónica se obtiene:

$$\begin{aligned}(x+2)^2+(y-1)^2 &= (5+2)^2+(-3-1)^2\\ &= 7^2+(-4)^2=65\end{aligned}$$

las coordenadas del P_1 no satisfacen la ecuación, es decir, $(1,-3)$ no pertenece a la circunferencia.

• Para el punto $P_2(1,-3)$, reemplazando en la ecuación canónica se obtiene:

$$\begin{aligned}(x+2)^2+(y-1)^2 &= (1+2)^2+(-3-1)^2\\ &= 3^2+(-4)^2=25\end{aligned}$$

las coordenadas del P_2 satisfacen la ecuación, es decir, $(1,-3)$ pertenece a la circunferencia.

2. Halle el centro y el radio de la circunferencia $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=16$

Solución:

La expresión $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=16$ es equivalente a $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left[y-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2=4^2$

Por tanto, $C(a,b)=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ y $r=4$

12.2. ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

Desarrollando las operaciones de la ecuación canónica de la circunferencia $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, con centro en (a,b), se obtiene

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Si $-2a=D$; $-2b=E$ y $h^2+k^2-r^2=E$, entonces la igualdad anterior es equivalente a

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Ejemplo: La ecuación general de la circunferencia con centro $\left(\frac{2}{3},-2\right)$ y radio 4, es:

A) $x^2+y^2-12x+36y-104=0$

B) $9x^2+9y^2+12x-6y+104=0$

C) $9x^2-9y^2+12x-36y-14=0$

D) $9x^2+9y^2-12x+36y-104=0$

Solución:

Primero se utiliza la ecuación canónica de la circunferencia, reemplazando los valores conocidos:

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y+2)^2=4^2$$

Se desarrollan los binomios y se simplifica

$$x^2+y^2-\frac{4}{3}x+4y+\frac{4}{9}+4-16=0$$

$$x^2+y^2-\frac{4}{3}x+4y-\frac{104}{9}=0$$

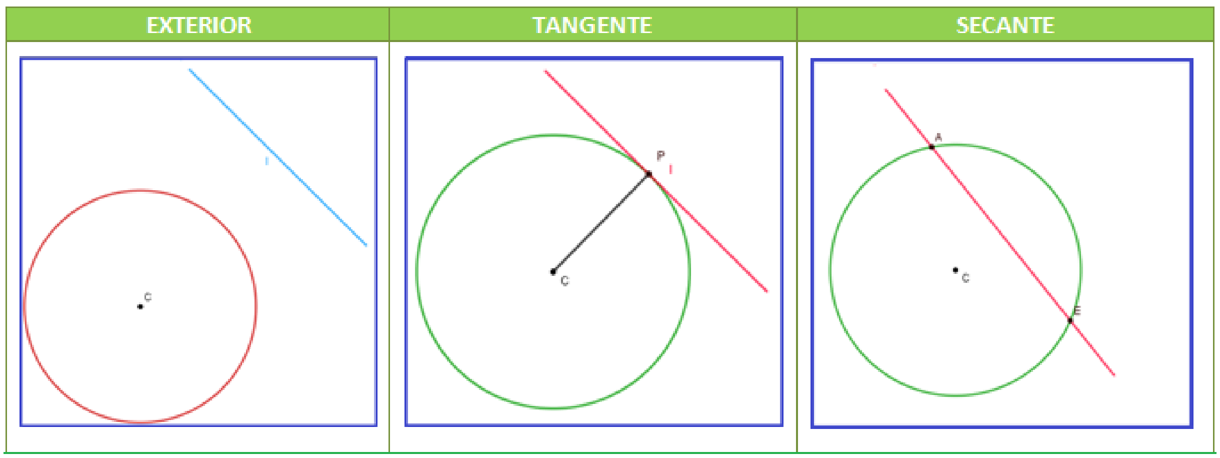
$$9x^2+9y^2-12x+36y-104=0$$

Por lo anterior, la respuesta correcta es **D)** $9x^2+9y^2-12x+36y-104=0$

12.3. POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y DE UNA CIRCUNFERENCIA EN EL PLANO

Dada una recta y una circunferencia en un mismo plano, se pueden presentar tres situaciones:

- La recta es exterior a la circunferencia, si no tienen puntos en común.
- La recta es tangente a la circunferencia, si tienen un mismo punto común.
- La recta es secante a la circunferencia, si tienen dos puntos comunes.



Ejemplo:Determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2-2x+2y-23=0$ en el punto $(4,3)$
Solución:

Al transformar la ecuación $x^2+y^2-2x+2y-23=0$ en la forma canónica,

se obtiene: $(x-1)^2+(y+i)^2 = 25$. Por tanto, la circunferencia tiene centro en el punto $(1,-1)$

Tomando el centro $(1,-1)$ y el punto $(4,3)$, se tiene la pendiente $m=\frac{3-(-1)}{4-1}=\frac{4}{3}$,

como m' es la pendiente de la recta perpendicular al radio $(4,3)$, se cumple

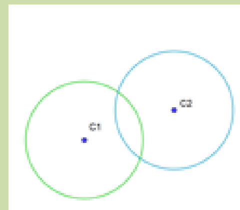
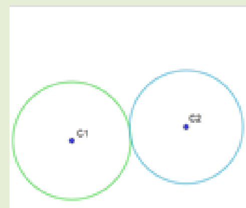
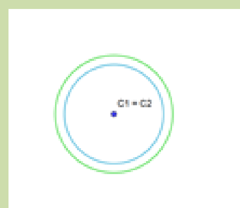
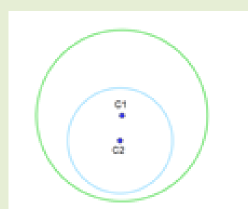
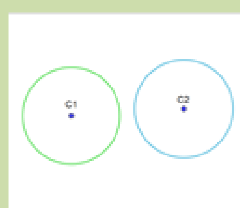
$$mm' = \frac{4}{3}m = -1, \text{ por tanto } m = -\frac{3}{4}$$

Así, $(y-3) = -\frac{4}{3}(x-4)$, luego la ecuación de la recta tangente es

$$3x+4y-24=0$$

12.4. POSICIÓN RELATIVA DE DOS CIRCUNFERENCIAS EN EL PLANO

Dos circunferencias ubicadas en un mismo plano,pueden ser:

POSICIÓN RELATIVA DE DOS CIRCUNFERENCIAS EN EL PLANO	
Secantes si se cortan en dos mismos puntos.	
Tangentes, si se cortan en un solo punto.	
Concéntricas, si tienen el mismo centro.	
interiores, si no se cortan en ningún punto ni comparten el centro	
Exteriores, si no se cortan en ningún punto ni comparten el centro	

12.5. TALLER

1. Indica la ecuación del lugar geométrico del plano OXY que se encuentra a una distancia de 2 unidades del origen

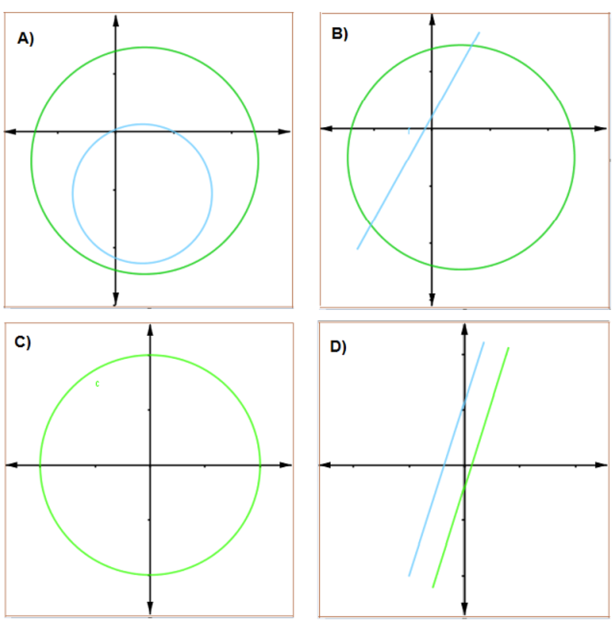
A) $x^2 + y^2 = 2$
B) $x + y = 2$
C)$x^2 + y^2 = 4$
D) $x + y = 4$

2.Calcular la ecuación de la circunferencia centrada en el punto $C(1, 1)$ y que pasa por el origen.

A) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$
B) $(x - 1)^2 + (y - 1) = 2$
C)$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{2}$
D) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{2}$

3.Señale la gráfica correspondiente a una curva, cuya ecuación es :

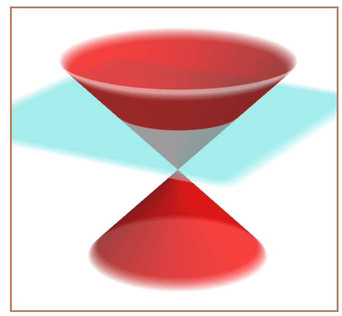
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



4.La ecuación de una circunferencia centrada en el punto $C(1, 0)$ y de radio $r = 2$, es:

A) $(x - 1)^2 + y^2 = 2$
B) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$
C)$(x - 1)^2 + y^2 = \sqrt{2}$
D) $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

5.¿ Qué línea plana resulta de la intersección del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $z = 3$?



A) Una recta
B) Una elipse
C)Una hipérbola
D) Una circunferencia

6.¿ Cuál es posición relativa de la recta $y = 3-2x$ respecto a la circunferencia $x^2+y^2-2x+3y+2 = 0$?

A) La recta corta a la circunferencia en un único punto, $(8, -3)$, por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

B) La recta corta a la circunferencia en los puntos, $(2, -1)$ y $(8, -3)$, por tanto, la recta es secante a la circunferencia.

C)No hay puntos de corte, por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

D) la recta corta a la circunferencia en un único punto, $(2, -1)$, por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

7.¿ Cuál es posición relativa de la recta $y = 3 - 2x$ respecto a la circunferencia $2x^2 + 2y^2 + 3x + 5y - 5 = 0$?

A) La recta corta a la circunferencia en un único punto, $(8, -3)$, por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

B) La recta corta a la circunferencia en los puntos, $(2, -1)$ y $(8, -3)$, por tanto, la recta es secante a la circunferencia.

C)No hay puntos de corte, por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

D) la recta corta a la circunferencia en un único punto, $(2, -1)$, por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

8.¿ Cuál es el centro y el radio de la circunferencia $36x^2 + 36y^2 + 24x + 72y + 41 = 0$?

A)$C\left(\frac{4}{3}, -1\right)$ y radio= $\sqrt{-\frac{1}{6}}$
B) $C\left(-\frac{1}{3}, -1\right)$ y radio= $\sqrt{-\frac{1}{36}}$
C)$C\left(-\frac{1}{3}, -10\right)$ y radio= $\sqrt{-\frac{4}{36}}$
D) $C\left(1, -1\right)$ y radio= $\sqrt{2}$

9. El diámetro de una circunferencia es el segmento de recta definido por los puntos: $A(-8, -2)$ y $B(4, 6)$. La ecuación que corresponde a dicha circunferencia, es:

A)$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 52$
B) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 52$
C)$x^2 - (y - 2)^2 = 52$
D) $(x + 2)^2 - y^2 = 52$

10.¿ La recta $2y + x = 10$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$? y en caso de ser verdadero, determine el punto de tangencia.

A)La recta es no tangente a la circunferencia, porque su no tienen puntos en común.

B) La recta es no tangente a la circunferencia, porque tiene dos puntos en común es $T(2, 4)$ y $P(5, 2)$

C)La recta es tangente a la circunferencia, porque su único punto en común es $T(5, 2)$

D) La recta es tangente a la circunferencia, porque su único punto en común es $T(2, 4)$

11. Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 11 = 0$, dos rectas tangentes posibles que son paralelas a la recta $x + y + 4 = 0$, corresponden a:

A)$x^2 + y - 11 = 0$ y $x^2 + y + 13 = 0$
B) $x + y + 11 = 0$ y $x + y - 13 = 0$
C)$x + y^2 + 11 = 0$ y $x + y^2 - 13 = 0$
D) $x - y + 13 = 0$ y $x + y + 13 = 0$

11. Halle y grafique la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $P()2, 3$ y es tangente:

A)Al eje de las abscisas
B) Al eje de las ordenadas
C)A la recta $-3x + y - 3 = 0$

LOGROS:
∗Comprende la definición de parábola y sus elementos.
∗Analiza las diferentes ecuaciones de la parábola.
∗Resuelve problemas reales que involucran la parábola.

Capítulo 13

La parábola

Si un cono es cortado por un plano a través de su eje, y también es cortado por otro plano que corte la base del cono en una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial, y si adicionalmente el diámetro de la sección es paralelo a un lado del triángulo axial, entonces cualquier línea recta que se dibuje desde la sección de un cono a su diámetro paralelo a la sección común del plano cortante y una de las bases del cono, será igual en cuadrado al rectángulo contenido por la línea recta cortada por ella en el diámetro que inicia del vértice de la sección y por otra línea recta que está en razón a la línea recta entre el ángulo del cono y el vértice de la sección que el cuadrado en la base del triángulo axial tiene al rectángulo contenido por los dos lados restantes del triángulo. Y tal sección será llamada una parábola.

Apolonio de Perge

13.1. ECUACIÓN CANÓNICA DE LA PARÁBOLA CON CENTRO EN (0,0)

13.1.1. Ecuación de la parábola con vértice en (0,0) y eje de simetría el eje x

la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(0,0)$, foco en $(p,0)$ y el eje x como eje de simetría, es:

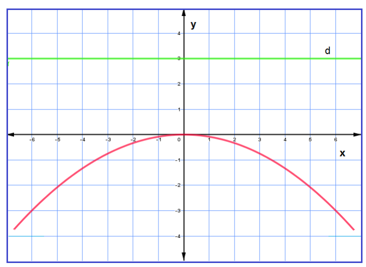
$$y^2 = 4px$$

13.1.2. ecuación de la parábola con vértice en (0,0) y eje de simetría en eje y

la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(0,0)$, foco en $(0.p)$ y el eje y como eje de simetría, es:

$$x^2 = 4py$$

Ejemplo: De acuerdo a la siguiente figura, determine los elementos de la parábola y su ecuación.



Solución:

Analizando la figura, la parábola tiene vértice en $(0,0)$ y se abre hacia abajo, es decir que la ecuación es de la forma $x^2 = 4py$ con $p > 0$.

por otra parte, $p = -3$ y los elementos de la parábola son:

vértice: $V(0,0)$

Directriz: $y = -p$ es decir, $-(-3) = 3$

Eje de simetría: eje y

Lado recto:$|4p| =$ 12

Foco: $F(0,p) = (0,-3)$

y tiene por ecuación: $x^2 = 4(-3)y$ es decir,

$$x^2 = -12y$$

13.2. ECUACIÓN CANÓNICA DE LA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN (h, k)

13.2.1. ecuación canónica de la parábola con vértice en (h, k) y eje de simetría paralelo al eje x

la ecuación canónica de la parábola con vértice en (h, k) y eje de simetría paralelo al eje x, es:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Donde p es la distancia del vértice al foco.

13.2.2. ecuación canónica de la parábola con vértice en (h, k) y eje de simetría paralelo al eje y

la ecuación canónica de la parábola con eje focal paralelo al eje y, con vértice en (h, k), es:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

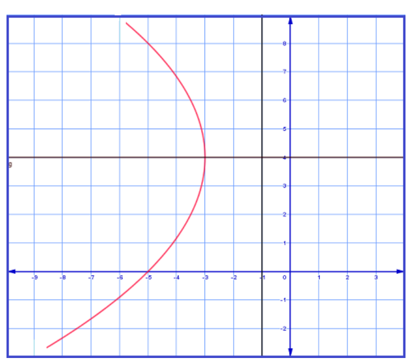
Donde p es la distancia del vértice al foco.

Ejemplo: Encontrar la ecuación canónica de la parábola que tiene vértice en $(-3, 4)$ y foco en $(-5, 4)$

Solución:
Como la parábola con vértice en $(-3, 4)$ y foco en $(-5, 4)$, esto quiero decir, es una parábola cuyo eje focal o eje de simetría es paralelo al eje x, y su gráfica se abre hacia la izquierda, ya que el foco es un punto ubicado a la izquierda del vértice.

la distancia p del vértice al foco está dada por la diferencia de las abscisas de estos puntos $p = -5 - (-3) = -2$ y como el vértice es $(-3, 4)$, al reemplazar en la ecuación canónica, se obtiene:

$$(y - 4)^2 = 4(-2)(x - (-3)), \quad \Rightarrow \quad (y - 4)^2 = -8(x + 3)$$



13.3. ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA

la parábola con vértice en $V(h,k)$ con distancia p del vértice al foco, tiene como ecuación general:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad \text{si su eje es paralelo al eje x ó}$$

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad \text{si su eje es paralelo al eje y}$$

Ejemplo:Determinar la ecuación general de la parábola con vértice en $(-4,2)$, que pasa por el punto $(0,6)$

Solución:
La ecuación canónica de la parábola es de la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Como la parábola pasa por el punto $(0,6)$ se remplazan los valores x, y en la ecuación:

$$(0-(-4))^2 = 4p(6-2) \quad \Rightarrow \quad (0+4)^2 = 4p(6-2)$$

$$4^2 = 4p(4) \quad \text{por tanto,} \quad p = 1$$

La ecuación canónica es $(x+4)^2 = 4(y-2)$, desarrollando se tiene:

$$x^2 + 8x + 16 = 4y - 8$$

$$x^2 + 8x - 4y + 24 = 0$$

sí $x^2 + 8x - 4y + 24 = 0$ es la ecuación general de la parábola

La parábola tiene tiene presencia en la naturaleza (como en la trayectoria de un proyectil, de una pelota de fútbol, entre otros); también hace presencia en la arquitectura(construcciones arquitectónicas como los cables de puentes) o en aparatos tecnológicos (antenas parabólicas, satélites, faro de vehículos, etc.)


13.4. TALLER

1. El lugar geométrico de todos los puntos del plano OXY que equidistan de una recta fija (directriz) y un punto fijo (foco) que no pertenece a la recta, es:

A) Circunferencia
B) Elipse
C)Parábola
D) Hipérbola

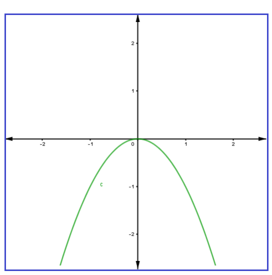
2. Encuentre las coordenadas del foco de la parábola dada por la ecuación $y^2 = -4x$

A) $F(1, 2)$
B) $F(-1, -2)$
C)$F(1, 0)$
D) $F(-1, 0)$

3. Encuentre la ecuación de la parábola cuyo vértice es $(-1, -3)$ y foco $(-1, 2)$

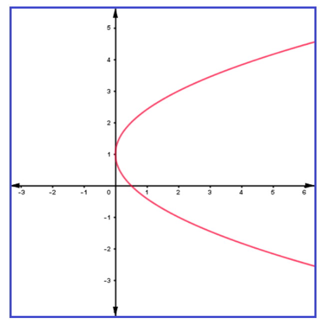
A) $(x + 1)^2 = 20(y + 3)$
B) $(y + 3)^2 = 20(x + 1)$
C)$(x - 1)^2 = 20(y - 1)$
D) $(x + 3)^2 = 20(y + 1)$

4. De acuerdo a la gráfica indique cuál es la ecuación a la que corresponde.



A) $x = y^2$
B) $y = x^2$
C)$x = -y^2$
D) $y = -x^2$

5. A partir de la siguiente gráfica, determine la ecuación de la parábola.



A) $x = y^2$
B) $(y - 1)^2 = 2x$
C)$x = -y^2$
D) $(y - 1)^2 = 2(x - 1)$

6. Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en $(0, -1)$.

A) $x^2 = -4y$
B) $(y - 1)^2 = 2x$
C)$x^2 = 2y$
D) $y^2 = -4x$

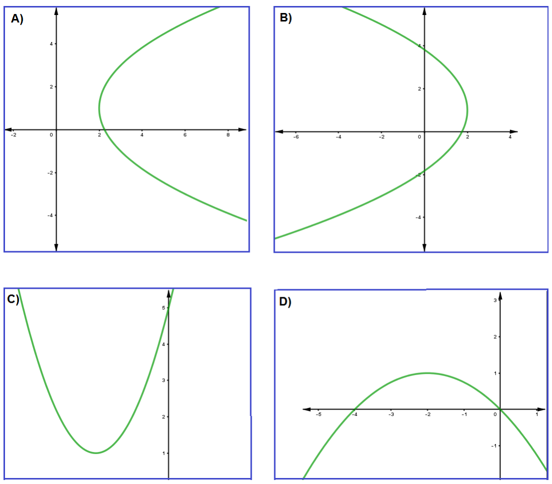
7. Hallar el vértice de la parábola $y^2 = 3x$.

A) $V(0, 2)$
B) $V(0, 0)$
C) $V(2, 0)$
D) $V(2, 2)$

8. Hallar el vértice de la parábola $4x - y^2 - 2y - 3 = 0$.

A) $V(0, 2)$
B) $V(2, 0)$
C) $V(-\frac{1}{2}, 1)$
D) $V(\frac{1}{2}, -1)$

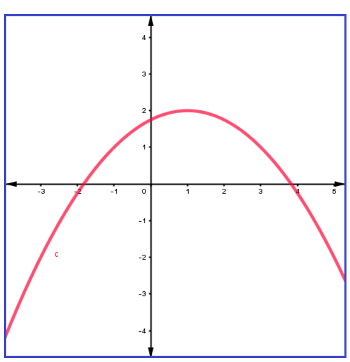
9.la gráfica que corresponde a la ecuación $(y-1)^2 = 4(x-2)$, es:



10. Encontrar el vértice y foco de la parábola dada por la ecuación $(x+1)^2 = 8(y-1)$

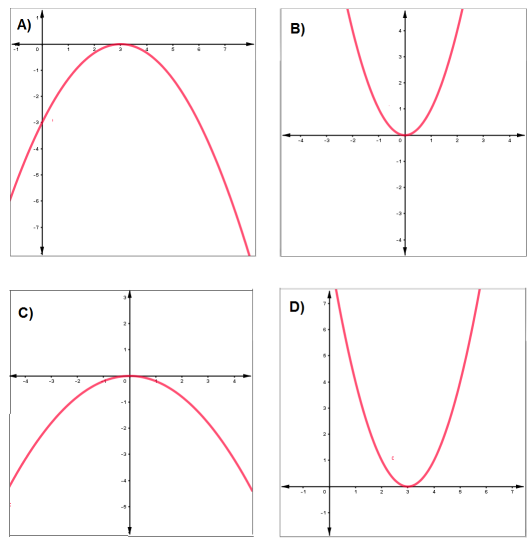
A) $V(-1,-3)$, $F(-1,-1)$
B) $V(1,-3)$, $F(1,-1)$
C) $V(-1,-1)$, $F(-1,-3)$
D) $V(-1,1)$, $F(-1,3)$

11. La ecuación de la parábola que corresponde al gráfico, es:



A) $(y+1)^2 = 4(x-2)$
B) $(x-1)^2 = -4(y-2)$
C)$(x)^2 = 4(y+2)$
D) $(y)^2 = -4(y+2)$

12. Dada la ecuación $x^2 = -5y$, su representación gráfica, es:



LOGROS:
∗Comprende la definición de elipse y sus elementos.
∗Analiza las diferentes ecuaciones de la elipse.
∗Resuelve problemas reales que involucran la elipse.

Capítulo 14

La elipse

14.1. ECUACIÓN CANÓNICA DE LA ELIPSE CON CENTRO EN (0,0)

Es importante conocer los elementos de la elipse, los cuales son:

- *Los focos:* Son los puntos fijos F_1 y F_2 del plano.
- *El eje focal:* Es la recta que pasa por los focos.
- *El centro:* Punto medio del segmento que une los focos.
- *Eje normal:* Recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro de la elipse.
- *Los vértices:*Puntos en que la elipse corta el eje focal.
- *El eje mayor:* Es el segmento que une los vértices.
- *El eje menor:* Es el segmento que une los puntos de corte de la elipse con el eje normal.

14.1.1. Ecuación canónica de la elipse con centro en (0,0) y eje focal igual al eje x

La elipse con centro $(0,0)$ y focos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$,tal que la suma de las distancias de un punto P(x,y), de la elipse a los focos es 2a y tiene como ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Donde a, b y $c > 0$

Ejemplo: Encuentre los elementos de la elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36}$

Solución: Comparando con la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} a^2 = 100 \quad &\Rightarrow \quad a = \pm 10 \\ b^2 = 36 \quad &\Rightarrow \quad b = \pm 6 \end{aligned}$$

luego, $a^2 = b^2 + c^2$, despejando c y reemplazando los valores correspondientes a a, b, entonces

$$c = \pm\sqrt{100 - 36} = \pm 8$$

14.1.2. Ecuación canónica de la elipse con centro en (0,0) y eje focal igual al eje y

la elipse con centro en $(0,0)$ y focos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$ tal que la suma de las distancias de un punto $P(x,y)$, de la elipse a los focos es $2a$, tiene la ecuación:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Donde a, b y $c>0$, $a>c$, $a>b$ y $a^2=b^2+c^2$

Ejemplo: determine todos los elementos, la ecuación y la gráfica de una elipse con centro en (0,0), cuyo eje focal coincide con el eje y, con uno de los focos en $(0,3)$ y excentricidad igual a $\frac{1}{2}$

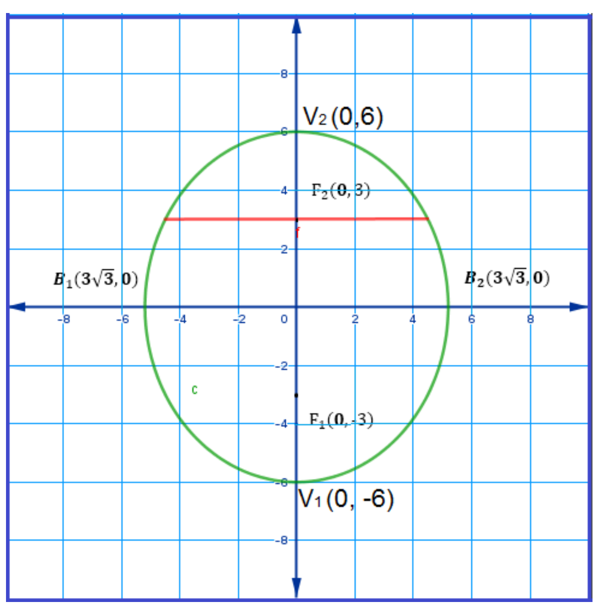
Solución: Como $F_2(0,3)$ entonces $c=3$, asi, el otro foco de la elipse es $F_2(0,-c)=(0,-3)$,

además por la relación $a^2=b^2+c^2$, se tienen que $b=\pm\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$

Los vértices de la elipse son $V_1(0,-6)$ y $V_2(0,6)$ y sus interceptos con el eje x son $B_1(-3\sqrt{3},0)$ y $B_2(3\sqrt{3},0)$.

El eje mayor tiene longitud 12 unidades, y el eje menor mide $6\sqrt{3}$, el lado recto de la elipse mide $LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 27}{6}=9$

Por tanto, la ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{36}=1$



14.2. ECUACIÓN CANÓNICA DE LA ELIPSE CON CENTRO (h,k)

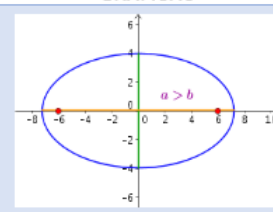
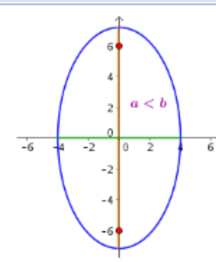
La ecuación canónica de la elipse con centro en (h,k), cuyo eje focal es paralelo al eje x y $a > b$, es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

La ecuación canónica de la elipse con centro en (h,k), cuyo eje focal es paralelo al eje y y $a > b$, es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Donde $a^2 = b^2 + c^2$

CENTRO	EJE FOCAL	ECUACION	FOCOS	VERTICES	INTERCEPTOS	GRAFICAS
(h,k)	Paralelo al eje x	$\frac{(x\text{-}h)^2}{a^2} + \frac{(y\text{-}k)^2}{b^2} = 1$ Longitud eje mayor: 2a Longitud eje menos:2b	$F_1(h\text{-}c, k)$ $F_2(h + c, k)$	$V_1(h\text{-}a, k)$ $V(h + a, k)$	Con eje y $B_1(h, k\text{-}b)$ $B_2(h, k + b)$	
(h,k)	Paralelo al eje y	$\frac{(x\text{-}h)^2}{b^2} + \frac{(y\text{-}k)^2}{a^2} = 1$ Longitud eje mayor: 2a Longitud eje menos:2b	$F_1(h, k\text{-}c)$ $F_2(h, k + c)$	$V_1(h, k\text{-}a)$ $V_2(h, k + a)$	Con el eje x $B_1(h\text{-}b, k)$ $B_2(h + b, k)$	

14.3. ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE

la ecuación general de la elipse con ejes paralelos a los ejes del plano cartesiano, es de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con A y C diferentes pero con el mismo signo.

LOGROS:

∗Comprende la definición de la hipérbola y sus elementos.

∗Analiza las diferentes ecuaciones de la hipérbola.

∗Resuelve problemas reales que involucran la hipérbola.

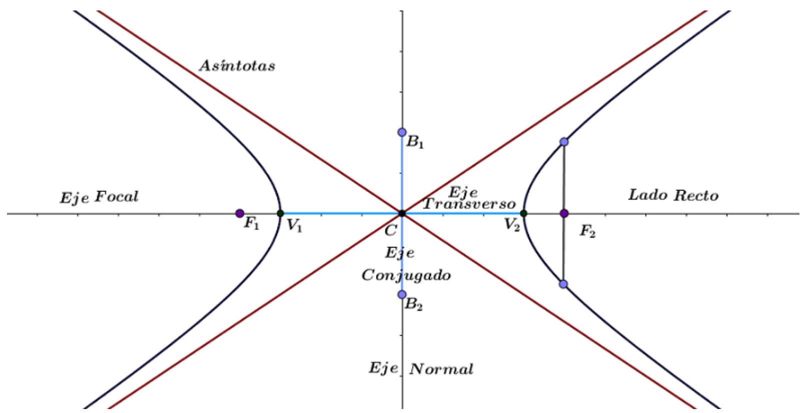
Capítulo 15

La Hipérbola

15.1. DEFINICIÓN DE LA HIPÉRBOLA.

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante positiva.

Dada la definición de hipérbola se cumple que $|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a$ donde a es un número real positivo.



15.2. ELEMENTOS DE LA HIPÉRBOLA

De acuerdo a la imágen anterior los elementos de una hipérbola se listan en la siguiente tabla:

Elemento	Definición		
EJE FOCAL	Recta que pasa por los dos focos.	Eje X	Eje Y
FOCOS	Puntos fijos del plano f_1 y f_2	$(\pm C, 0)$	$(0, \pm C)$
VÉRTICES	Puntos sobre la hipérbola que se encuentran sobre el eje focal V_1 y V_2	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
CENTRO	Punto medio del eje transverso		
EJE TRANSVERSO	Segmento cuyos extremos son los vértices	$2a$	$2a$
EJE NORMAL	Recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro de la hipérbola		
EJE CONJUGADO	Segmento perpendicular al eje transverso que pasa por el punto centro y sus extremos son los puntos B_1 y B_2	$2b$	$2b$
ASINTOTAS	Dos rectas que pasan por el centro y que se aproximan a las ramas de la hipérbola.	$y = \pm \frac{b}{a} x$	$y = \pm \frac{a}{b} x$
LADO RECTO	Segmento perpendicular al eje focal que pasa por un foco y que une a dos puntos de la hipérbola	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$

15.3. ECUACIÓN CANÓNICA DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN $(0,0)$

La hipérbola con centro en $(0,0)$ y focos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$ tal que la diferencia de las distancias de un punto $P(x,y)$ de la hipérbola a los focos es $2a$, cuyo eje focal es el eje x tiene por ecuación canónica, la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a, b, c > 0$, $c > a$ y $b^2 = c^2 - a^2$

La hipérbola con centro en $(0,0)$ y focos $F_1(0,-c)$ y $F_2(0,c)$ tal que la diferencia de las distancias de un punto $P(x,y)$ de la hipérbola a los focos es $2a$, cuyo eje focal es el eje y tiene por ecuación canónica, la siguiente ecuación:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

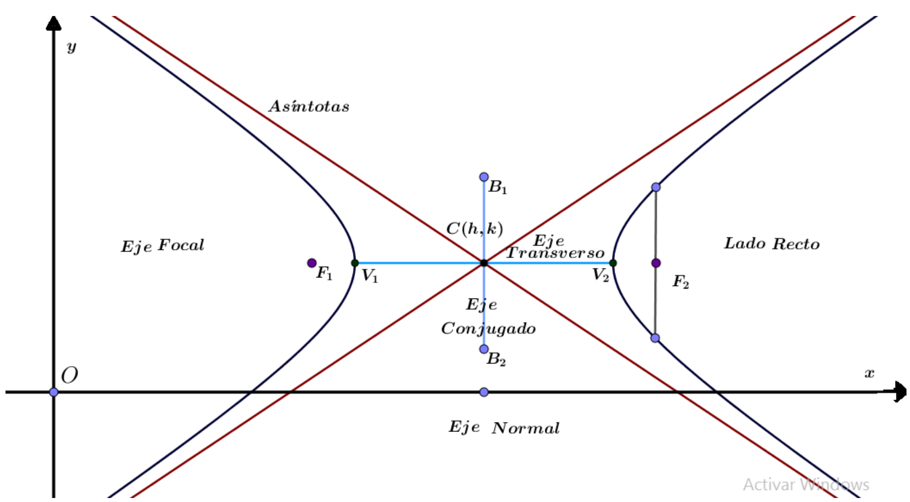
donde $a, b, c > 0$, $c > a$ y $b^2 = c^2 - a^2$

Para las hipérbolas que cumplen las condiciones dadas, se tiene que la excentricidad está dada por:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

Donde $c > a$ y $0 < e < 1$

15.4. ECUACIÓN CANÓNICA DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN (h,k)



La hipérbola con centro en $C(h,k)$ y focos $F_1(h-c,k)$ y $F_2(h+c,k)$ tal que la diferencia de las distancias de un punto $P(x,y)$ de la hipérbola a los focos es $2a$, cuyo eje focal es el eje x tiene por ecuación canónica, la siguiente ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

donde $a, b, c > 0$, $c > a$ y $b^2 = c^2 - a^2$

La hipérbola con centro en (h,k) y focos $F_1(h, k-c)$ y $F_2(h, k+c)$ tal que la diferencia de las distancias de un punto $P(x,y)$ de la hipérbola a los focos es $2a$, cuyo eje focal es el eje y tiene por ecuación canónica, la siguiente ecuación:

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

donde $a, b, c > 0$, $c > a$ y $b^2 = c^2 - a^2$

Para las hipérbolas cuyo centro se encuentran en un punto $C(h,k)$ sus elementos se pueden calcular de la siguiente manera.

Elemento		
EJE FOCAL	Eje X	Eje Y
FOCOS	$(h \pm C, k)$	$(h, k \pm C)$
VÉRTICES	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
EJE TRANSVERSO	$2a$	$2a$
EJE NORMAL	Paralelo al eje y	Paralelo al eje x
EJE CONJUGADO	$\boldsymbol{2b}$	$\boldsymbol{2b}$
ASINTOTAS	$\boldsymbol{y-k = \pm\frac{b}{a}(x-h)}$	$\boldsymbol{y-k = \pm\frac{a}{b}(x-h)}$
LADO RECTO	$\boldsymbol{\frac{2b^2}{a}}$	$\boldsymbol{\frac{2b^2}{a}}$

15.5. ECUACIÓN GENERAL DE LA HIPÉRBOLA

La ecuación general de la hipérbola con ejes paralelos a los ejes del plano cartesiano, es de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{15.1}$$

Donde $A \neq 0$,$B \neq 0$. Y A y B tienen signos diferentes. Además suponiendo que $BD + AE^2 - 4ABF < 0$, entonces se cumple que

- Si $A > 0$ y $B < 0$, el eje focal es paralelo al eje x
- Si $A < 0$ y $B > 0$, el eje focal es paralelo al eje y

EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA CICLOS DE VALIDACIÓN Y EDUCACIÓN PARA ADULTOS

Este proyecto pretende realizar módulos de trabajo diseñados con el fin de acercar a los estudiantes desde el primer ciclo de educación a los formatos de las pruebas Saber 11°, para que de esta manera se obtengan mejores resultados, sin dejar a un lado la importancia de trasmitir los contenidos de una forma clara y acertada; formando personas competitivas y con aptitudes para desempeñarse en la educación superior.