

	<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAr113</b>
	<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSION: 3</b>
	<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
		<b>PAGINA: 1 de 7</b>

26.

<b>FECHA</b>	jueves, 21 de junio de 2018
--------------	-----------------------------

Señores  
**UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA**  
 BIBLIOTECA  
 Ciudad

<b>UNIDAD REGIONAL</b>	Sede Fusagasugá
<b>TIPO DE DOCUMENTO</b>	Tesis
<b>FACULTAD</b>	Educación
<b>NIVEL ACADÉMICO DE FORMACION O PROCESO</b>	Pregrado
<b>PROGRAMA ACADÉMICO</b>	Licenciatura en Matemáticas

El Autor(Es):

<b>APELLIDOS COMPLETOS</b>	<b>NOMBRES COMPLETOS</b>	<b>No. DOCUMENTO DE IDENTIFICACIÓN</b>
Ruiz Rodríguez	Jhoan Sebastian	1069752620

Diagonal 18 No. 20-29 Fusagasugá – Cundinamarca  
 Teléfono (091) 8281483 Línea Gratuita 018000976000  
 www.ucundinamarca.edu.co E-mail: info@ucundinamarca.edu.co  
 NIT: 890.680.062-2

*Documento controlado por el Sistema de Gestión de la Calidad  
 Asegúrese que corresponde a la última versión consultando el Portal Institucional*

	<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAr113</b>
	<b>PROCESO GESTION APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSION: 3</b>
	<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
		<b>PAGINA: 2 de 7</b>

Director(Es) y/o Asesor(Es) del documento:

<b>APELLIDOS COMPLETOS</b>	<b>NOMBRES COMPLETOS</b>
Benítez Manjarrés	Nora

<b>TITULO DEL DOCUMENTO</b>
<b>LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRAFICOS ESTUDIADOS CON GEOGEBRA. ANÁLISIS EN EL ARTE DE CULTURAS ANCESTRALES Y CONTEMPORÁNEAS</b>

<b>SUBTITULO</b> (Aplica solo para Tesis, Artículos Científicos, Disertaciones, Objetos Virtuales de Aprendizaje)

<b>TRABAJO PARA OPTAR AL TITULO DE:</b> Aplica para Tesis/Trabajo de Grado/Pasantía
Licenciado en Matemáticas

<b>AÑO DE EDICION DEL DOCUMENTO</b>	<b>NUMERO DE PAGINAS</b>
2018	94

<b>DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS</b> (Usar 6 descriptores o palabras claves)	
<b>ESPAÑOL</b>	<b>INGLÉS</b>
1. Grupos cristalográficos	Crystallographic groups
2. GeoGebra	GeoGebra
3. Educación	Education
4. TIC	ICT
5. Geometría	Geometry
6. Arte	Art

Diagonal 18 No. 20-29 Fusagasugá – Cundinamarca  
Teléfono (091) 8281483 Línea Gratuita 018000976000  
www.ucundinamarca.edu.co E-mail: info@ucundinamarca.edu.co  
NIT: 890.680.062-2

*Documento controlado por el Sistema de Gestión de la Calidad  
Asegúrese que corresponde a la última versión consultando el Portal Institucional*

	<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAr113</b>
	<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSION: 3</b>
	<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
		<b>PAGINA: 3 de 7</b>

## RESUMEN DEL CONTENIDO EN ESPAÑOL E INGLÉS

(Máximo 250 palabras – 1530 caracteres, aplica para resumen en español):

La Geometría es una asignatura que ha venido cobrando importancia en las aulas colombianas en los últimos años, ya que no solo es utilizada en pruebas internacionales y nacionales como las pruebas Pisa y las pruebas Saber, sino que también se ha encontrado en esta, una forma de concebir el mundo, aterrizando muchas situaciones abstractas a elementos concretos propios del contexto de los estudiantes.

La enseñanza de la Geometría se ha visto fortalecida por el avance tecnológico y el desarrollo de diferentes tipos de Software, facilitando los procesos de observación y ganando tiempo en las diferentes construcciones, algunos ejemplos de Software utilizados son "Cabry Geometry", "Regla y Compás", "Derive" y "GeoGebra", que además de presentar las características mencionadas tienen una versión gratuita de fácil manipulación, ofreciendo cobertura y calidad en los procesos enseñanza-aprendizaje.

El presente proyecto tiene como objetivo reforzar métodos de observación en estudiantes del núcleo temático Pensamiento geométrico de la Licenciatura en Matemáticas de la UDEC, con ayuda de un Recurso Educativo Abierto (REA), facilitado por el software GeoGebra, para identificar estos grupos tanto en figuras virtuales como reales, unas diseñadas con el programa mencionado y otras encontradas en el arte y arquitectura de ciertas culturas como: "La cultura Nazari" y "La obra de pintor Escher".

Geometry is a subject that has been gaining importance in Colombian classrooms in recent years, since it is not only used in international and national tests such as the Pisa tests and the Saber tests, but it has also been found in this to conceive the world, landing many abstract situations to concrete elements of the context of the students.

The teaching of Geometry has been strengthened by technological progress and the development of different types of Software, facilitating observation processes and gaining time in different constructions, some examples of Software used are "Cabry Geometry", "Rule and Compass", "Derive" and "GeoGebra", which in addition to presenting the mentioned characteristics have a free version of easy manipulation, offering coverage and quality in the teaching-learning processes.

The objective of this project is to reinforce methods of observation in students of the thematic core Geometric Thought of the Mathematics Degree of the UDEC, with the help of an Open Educational Resource (REA), facilitated by the GeoGebra software, to identify these groups both in figures virtual as real, some designed with the aforementioned program and others found in the art and architecture of certain cultures such as: "The Nazari culture" and "The work of painter Escher".

## AUTORIZACION DE PUBLICACION

Por medio del presente escrito autorizo (Autorizamos) a la Universidad de Cundinamarca para que, en desarrollo de la presente licencia de uso parcial, pueda ejercer sobre mí (nuestra) obra las atribuciones que se indican a continuación,

Diagonal 18 No. 20-29 Fusagasugá – Cundinamarca  
 Teléfono (091) 8281483 Línea Gratuita 018000976000  
 www.ucundinamarca.edu.co E-mail: info@ucundinamarca.edu.co  
 NIT: 890.680.062-2

*Documento controlado por el Sistema de Gestión de la Calidad  
 Asegúrese que corresponde a la última versión consultando el Portal Institucional*

	<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAr113</b>
	<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSION: 3</b>
	<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
		<b>PAGINA: 4 de 7</b>

teniendo en cuenta que, en cualquier caso, la finalidad perseguida será facilitar, difundir y promover el aprendizaje, la enseñanza y la investigación.

En consecuencia, las atribuciones de usos temporales y parciales que por virtud de la presente licencia se autoriza a la Universidad de Cundinamarca, a los usuarios de la Biblioteca de la Universidad; así como a los usuarios de las redes, bases de datos y demás sitios web con los que la Universidad tenga perfeccionado una alianza, son:

Marque con una "X":

<b>AUTORIZO (AUTORIZAMOS)</b>	<b>SI</b>	<b>NO</b>
1. La reproducción por cualquier formato conocido o por conocer.	X	
2. La comunicación pública por cualquier procedimiento o medio físico o electrónico, así como su puesta a disposición en Internet.	X	
3. La inclusión en bases de datos y en sitios web sean éstos onerosos o gratuitos, existiendo con ellos previa alianza perfeccionada con la Universidad de Cundinamarca para efectos de satisfacer los fines previstos. En este evento, tales sitios y sus usuarios tendrán las mismas facultades que las aquí concedidas con las mismas limitaciones y condiciones.	X	
4. La inclusión en el Repositorio Institucional.	X	

De acuerdo con la naturaleza del uso concedido, la presente licencia parcial se otorga a título gratuito por el máximo tiempo legal colombiano, con el propósito de que en dicho lapso mi (nuestra) obra sea explotada en las condiciones aquí estipuladas y para los fines indicados, respetando siempre la titularidad de los derechos patrimoniales y morales correspondientes, de acuerdo con los usos honrados, de manera proporcional y justificada a la finalidad perseguida, sin ánimo de lucro ni de comercialización.

Para el caso de las Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, de manera complementaria, garantizo(garantizamos) en mi(nuestra) calidad de estudiante(s) y por ende autor(es) exclusivo(s), que la Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi(nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro (aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que

	<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAr113</b>
	<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSION: 3</b>
	<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
		<b>PAGINA: 5 de 7</b>

no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos de la Tesis o Trabajo de Grado es de mí (nuestra) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

Sin perjuicio de los usos y atribuciones otorgadas en virtud de este documento, continuaré (continuaremos) conservando los correspondientes derechos patrimoniales sin modificación o restricción alguna, puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación de los derechos patrimoniales derivados del régimen del Derecho de Autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “*Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores*”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables. En consecuencia, la Universidad de Cundinamarca está en la obligación de RESPETARLOS Y HACERLOS RESPETAR, para lo cual tomará las medidas correspondientes para garantizar su observancia.

**NOTA:** (Para Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía):

**Información Confidencial:**

Esta Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, contiene información privilegiada, estratégica, secreta, confidencial y demás similar, o hace parte de la investigación que se adelanta y cuyos resultados finales no se han publicado. **SI**  **NO** .

En caso afirmativo expresamente indicaré (indicaremos), en carta adjunta tal situación con el fin de que se mantenga la restricción de acceso.

**LICENCIA DE PUBLICACION**

Como titular(es) del derecho de autor, confiero(erimos) a la Universidad de Cundinamarca una licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integrará en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha de inclusión en el repositorio, por un plazo de 5 años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del autor. El autor podrá dar por terminada la licencia solicitándolo a la Universidad por escrito. (Para el caso de los Recursos Educativos Digitales, la Licencia de Publicación será permanente).

Diagonal 18 No. 20-29 Fusagasugá – Cundinamarca  
 Teléfono (091) 8281483 Línea Gratuita 018000976000  
 www.ucundinamarca.edu.co E-mail: info@ucundinamarca.edu.co  
 NIT: 890.680.062-2

	<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAr113</b>
	<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSION: 3</b>
	<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
		<b>PAGINA: 6 de 7</b>

b) Autoriza a la Universidad de Cundinamarca a publicar la obra en formato y/o soporte digital, conociendo que, dado que se publica en Internet, por este hecho circula con un alcance mundial.

c) Los titulares aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto, renuncian a recibir beneficio alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente licencia y de la licencia de uso con que se publica.

d) El(Los) Autor(es), garantizo(amos) que el documento en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi (nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro(aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos es de mí (nuestro) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

e) En todo caso la Universidad de Cundinamarca se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del autor y la fecha de publicación.

f) Los titulares autorizan a la Universidad para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

g) Los titulares aceptan que la Universidad de Cundinamarca pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

h) Los titulares autorizan que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados en los literales anteriores bajo los límites definidos por la universidad en el "Manual del Repositorio Institucional AAAM003"

i) Para el caso de los Recursos Educativos Digitales producidos por la Oficina de Educación Virtual, sus contenidos de publicación se rigen bajo la Licencia Creative Commons: Atribución- No comercial- Compartir Igual.



	<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAr113</b>
	<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSIÓN: 3</b>
	<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
		<b>PAGINA: 7 de 7</b>

j) Para el caso de los Artículos Científicos y Revistas, sus contenidos se rigen bajo la Licencia Creative Commons Atribución- No comercial- Sin derivar.



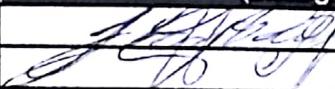
**Nota:**

Si el documento se basa en un trabajo que ha sido patrocinado o apoyado por una entidad, con excepción de Universidad de Cundinamarca, los autores garantizan que se ha cumplido con los derechos y obligaciones requeridos por el respectivo contrato o acuerdo.

La obra que se integrará en el Repositorio Institucional, está en el(los) siguiente(s) archivo(s).

Nombre completo del Archivo Incluida su Extensión (Ej. PerezJuan2017.pdf)	Tipo de documento (ej. Texto, imagen, video, etc.)
1.Los_17_grupos_cristalográficos_estudiados_con_geogebra.pdf	Texto
2.	
3.	
4.	

En constancia de lo anterior, Firmo (amos) el presente documento:

APELLIDOS Y NOMBRES COMPLETOS	FIRMA (autógrafa)
Ruiz Rodríguez Jhoan Sebastian	

12.1.50

**LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRAFICOS ESTUDIADOS CON GEOGEBRA. ANÁLISIS  
EN EL ARTE DE CULTURAS ANCESTRALES Y CONTEMPORÁNEAS**

**Jhoan Sebastian Ruiz Rodríguez**

**Universidad de Cundinamarca  
Facultad de educación  
Departamento de licenciatura en matemáticas  
Fusagasugá  
2018**

**LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRAFICOS ESTUDIADOS CON GEOGEBRA. ANÁLISIS  
EN EL ARTE DE CULTURAS ANCESTRALES Y CONTEMPORÁNEAS**

**Jhoan Sebastian Ruiz Rodríguez**

**Trabajo presentado como requisito para optar por el título de licenciado en matemáticas**

**Director: Nora Benítez Manjarrés  
Magister en educación**

**Universidad de Cundinamarca  
Facultad de educación  
Departamento de licenciatura en matemáticas  
Fusagasugá  
2018**

## **Dedicatoria**

A mi madre, Teodomira Ruiz, quien ha sido mi motor principal y a quien le debo lo que en día soy, mi formación personal, académica, laboral y familiar; pues es ella más que mi ejemplo de vida que establece, que las metas, los sueños y los anhelos son alcanzables de acuerdo a nuestro nivel de dedicación y optimismo, sin importar las circunstancias se encuentra ella con una palabra, un gesto o una sonrisa, siempre en pro de mejorar, es para mí un orgullo ser su hijo y deseo serlo como hijo para ella.

A mi familia en general: mis hermanos, mi tío, mis primos y todas aquellas personas que alguna forma siempre me apoyaron en este proceso que con este trabajo de grado culmino, empezando así una nueva etapa en mi ámbito académico y laboral.

A mi asesora de tesis, Nora Benítez, quien representa para mí más que mi maestra de matemáticas, es ella un ejemplo vivo de que la constancia y la perseverancia logran lo que el talento por sí solo no alcanza, pero he de aclarar que como docente, esposa, hija y madre posee un talento excepcional, a quien aprecio demasiado y es gracias a ella mi decisión de estudiar una carrera tan espléndida como lo es la matemáticas.

## **Agradecimientos**

Es muy importante para mí culminar este trabajo de grado, para obtener el título de Licenciado en matemáticas, sin embargo no hubiese sido posible sin aquellas personas que me brindaron su ayuda y apoyo en momentos determinantes que surgieron en el desarrollo de este proceso.

Agradezco a todas las personas que de alguna u otra forma participaron y me apoyaron en este proceso académico, a la Srta. Beatriz Benavides Rojas, a mi hermano Edgar Leonel Ruiz, a mis compañeros de estudios y futuros colegas, y a todos los que en algún momento me ayudaron a solventar situaciones de diferente índole, haciendo de esto que ayer era un sueño, hoy una realidad.

Agradezco de igual forma a los estudiantes de la línea de pensamiento geométrico, de la carrera de matemáticas en la Universidad de Cundinamarca, quienes participaron activamente en el proceso de implementación del Recurso Educativo Abierto (REA), que con su ardua dedicación en cada uno de los diseños realizados también colaboraron con la realización de este proyecto.

## Contenido

CAPITULO I	1
1. Introducción	1
2. Planteamiento del problema	2
Formulación del problema	2
3. Objetivos	3
Objetivo General	3
Objetivos específicos	3
4. Justificación	4
CAPÍTULO II	7
5. Estado del arte	7
6. Marco Teórico	13
Uso de las TIC's en la educación	13
Recurso Educativo Abierto (REA)	14
Pensamiento espacial	15
Semilleros de investigación	15
CAPÍTULO III	17
7. Institución Educativa donde se implementará	17
8. Contexto sociocultural	17
9. Perfil de los beneficiarios	18

10.	Nivel educativo	18
11.	Asignaturas involucradas	18
12.	Temas principales	19
13.	Método de trabajo	19
13.1	Diseño del REA	20
13.1.1	Construcción del grupo p1	22
13.1.2	Imagen del mosaico	29
13.1.3	Guía de construcción	30
13.1.4	Implementación del REA	34
13.1.5	Evaluación	55
CAPÍTULO IV		60
14.	Resultados	60
15.	Análisis de los resultados	62
CAPÍTULO IV		63
16.	Conclusiones	63
17.	Recomendaciones	63
LISTA DE REFERENCIAS		64
ANEXOS		66

**Tabla de figuras**

Ilustración 1: Interfaz de geogebra 5.0	21
Ilustración 2: paso 1 construcción del grupo p1	22
Ilustración 3: Paso 2 construcción del grupo p1	23
Ilustración 4: paso 3 construcción del grupo p1	24
Ilustración 5: paso 4 construcción del grupo p1	24
Ilustración 6: Aplicación de la casilla de control sobre el polígono base	25
Ilustración 7: paso 5 construcción del grupo p1	25
Ilustración 8: Paso 6 construcción del grupo p1	26
Ilustración 9: paso 7 construcción del grupo p1	26
Ilustración 10: paso 8 construcción del grupo p1	27
Ilustración 11: paso 9 construcción del grupo p1	28
Ilustración 12 Mosaico correspondiente al grupo p1	29
Ilustración 13 Mosaico en formato png extraído de GeoGebra	30
Ilustración 14 Mosaico ejemplo del grupo cristalográfico p1	33
Ilustración 15 Adaptación al software	35
Ilustración 16 Construcción del grupo p1	37
Ilustración 17 Construcción del grupo p4	39
Ilustración 18 Construcción de los demás grupos cristalográficos	41
Ilustración 19 Estudiantes de la línea de pensamiento geométrico trabajando en la sala	43
Ilustración 20 Construcción de una obra artística de Escher	43
Ilustración 21 Registro de estudiantes en el REA	45
Ilustración 22 Construcción de los grupos cristalográficos p1 y p2	47

Ilustración 23 CONSTRUCCIÓN DE LOS GRUPOS CRISTALOGRAFICOS P3 Y P4	48
Ilustración 24 Estudiantes de pensamiento geométrico construyendo los diseños de la Alhambra en GeoGebra	51
Ilustración 25 Estudiantes trabajando en la creación de la obra de Escher	53
Ilustración 26 Estudiantes presentando su obra de escher diseñada con GeoGebra	54
Ilustración 27 Diseño de la Alhambra realizado por Adriana Lopez	55
Ilustración 28 Diseño de la Alhambra realizado por Angelo Mayorga	55
Ilustración 29 Diseño de la Alhambra realizado por Adriana Rivera	56
Ilustración 30 Diseño de la Alhambra realizado por Jonathan David	56
Ilustración 31 Diseño de la Alhambra realizado por Luis Miguel	57
Ilustración 32 Obra de Escher recreada por Karen, 2017 II semestre	67
Ilustración 33 Obra de Escher recreada por Cristian Melo, 2017 II Semestre	68
Ilustración 34 Obra de Escher recreada por José Aguirre, 2018 i semestre	68
Ilustración 35 Obra de Escher recreada por Luz Adriana, 2018 I Semestre	69
Ilustración 36 Promedios obtenidos en el segundo semestre 2017	69
Ilustración 37 Promedios obtenidos en el primer semestre 2018	70

**Tabla de tablas**

Tabla 1 Analisis de la tesela grupo p1	27
Tabla 2 Análisis de la prototesela	28
Tabla 3 Relación en fbt y fp	28
Tabla 4 Descripción de la sesión i, 2017 ii semestre	34
Tabla 5 Descripción de la sesión ii, 2017 ii semestre	36
Tabla 6 Descripción de la sesión iii, 2017 ii semestre	38
Tabla 7 Descripción de la sesión iv, 2017 ii semestre	39
Tabla 8 Descripción de la sesión v y vi, 2017 ii semestre	41
Tabla 9 Descripción de la sesión i, 2018 i semestre	43
Tabla 10 Descripción de la sesión ii, 2018 i semestre	45
Tabla 11 Descripción de la sesión iii, 2018 i semestre	47
Tabla 12 Descripción de la sesión iv, 2018 i semestre	49
Tabla 13 Descripción de la sesión v, 2018 i semestre	50
Tabla 14 Descripción de la sesión vi, 2018 i semestre	51
Tabla 15 Descripción de la sesión vii, 2018 i semestre	53
Tabla 16 Formato de la rúbrica de evaluación, II semestre 2017	57
Tabla 17 Formato de la rúbrica de evaluación, I semestre 2018	60
Tabla 18 Autoevaluación de Miguel Ángelo Mayorga Henao	64

## **Tabla de Anexos**

Anexo I: Participación en II Seminario Pedagógico realizado en la Normal de Pasca

Anexo II: Formato de análisis de los 17 grupos cristalográficos

Anexo III: Análisis de los 17 grupos cristalográficos realizada por Ángelo Mayorga Henao



## CAPÍTULO I

### 1. Introducción

La Geometría es una asignatura que ha venido cobrando importancia en las aulas colombianas en los últimos años, ya que no solo es utilizada en pruebas internacionales y nacionales como las pruebas Pisa y las pruebas Saber, sino que también se ha encontrado en esta, una forma de concebir el mundo, aterrizando muchas situaciones abstractas a elementos concretos propios del contexto de los estudiantes.

La enseñanza de la Geometría se ha visto fortalecida por el avance tecnológico y el desarrollo de diferentes tipos de Software, facilitando los procesos de observación y ganando tiempo en las diferentes construcciones, algunos ejemplos de Software utilizados son “*Cabry Geometry*”, “*Regla y Compás*”, “*Derive*” y “*GeoGebra*”, que además de presentar las características mencionadas tienen una versión gratuita de fácil manipulación, ofreciendo cobertura y calidad en los procesos enseñanza-aprendizaje.

El presente proyecto tiene como objetivo reforzar métodos de observación en estudiantes del núcleo temático Pensamiento geométrico de la Licenciatura en Matemáticas de la UDEC, con ayuda de un Recurso Educativo Abierto (REA), facilitado por el software GeoGebra, para identificar estos grupos tanto en figuras virtuales como reales, unas diseñadas con el programa mencionado y otras encontradas en el arte y arquitectura de ciertas culturas como: “La cultura Nazari” y “La obra de pintor Escher”.

## **2. Planteamiento del problema**

Resultados en diferentes tipos de exámenes, como las pruebas Pisa, señalan con claridad el déficit en el manejo del razonamiento Geométrico-Espacial, aunque en general los resultados en la competencia matemática son bajos, los peores índices se tienen en los procesos relacionados con el espacio y las magnitudes, como lo manifiesta el ministerio de educación en su informe acerca de los resultados y análisis la prueba mencionada, aplicada en el año 2015 esto se debe a que no se genera en el aula un ambiente favorable para su enseñanza o en el peor de los casos se obvia su enseñanza.

Muchos problemas matemáticos requieren de una minuciosa observación de la cual se debe abstraer información suficiente para el desarrollo de los mismos, proceso en el que muchos estudiantes de pensamiento geométrico de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Cundinamarca, futuros docentes, se quedan cortos, es por esto que se debe trabajar en estos aspectos, además el desarrollo del proyecto ofrece conocimientos básicos para asignaturas futuras como es el caso de Algebra abstracta y la teoría de grupos.

### **Formulación del problema**

¿Cómo contribuir a la visualización y representación de los grupos cristalográficos a través un Recurso Educativo Tecnológicos Abierto REA dirigido a los estudiantes del núcleo Pensamiento geométrico de la UDEC (durante 2018)?

### 3. Objetivos

#### Objetivo General

Desarrollar e implementar un Recurso Educativo Tecnológico Abierto REA, para la visualización y representación de los grupos cristalográficos partir del uso de GeoGebra, dirigido a estudiantes del núcleo Pensamiento Geométrico de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Cundinamarca.

#### Objetivos específicos

Diseñar un Recurso Educativo Tecnológico Abierto REA, que relacione los 17 grupos cristalográficos con expresiones artísticas de diferentes culturas ancestrales y contemporáneas.

Implementar el REA en los estudiantes de la línea de pensamiento geométrico de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Cundinamarca.

Analizar la influencia del REA mediada por el uso de GeoGebra, con respecto a la visualización y representación de las isometrías contenidas en los 17 grupos cristalográficos.

#### 4. Justificación

Los grupos cristalográficos son asociaciones isométricas de transformaciones aplicadas a figuras geométricas específicas, con el objetivo de generar estructuras capaces de cubrir el plano: “En 1891, el cristalógrafo E. S. Feodorov, demostró que sólo existen básicamente 17 grupos cristalográficos, al hacer una clasificación exhaustiva de ellos” (Rivera, 1999, p. 149). Muchos problemas matemáticos requieren de una minuciosa observación, de la cual se debe abstraer información suficiente para el desarrollo de los mismos, proceso en el que muchos estudiantes se quedan cortos. El Software facilita y agiliza estos procesos, provocando no solo el interés del educando por la manipulación de la tecnología sino que a su vez se genera procesos significativos de aprendizaje.

Tal y como lo señala el informe ejecutivo, “Colombia en PISA 2015”, emitido por el Ministerio de Educación Nacional: “Colombia aún tiene más del 40% de los estudiantes en el nivel de desempeño más bajo en PISA (resultado especialmente alto en matemáticas, donde el nivel uno reúne a más del 60% de los estudiantes)” (Mineducación, 2016, pp. 15). Al igual que los resultados obtenidos por cada una de las instituciones educativas en las pruebas Nacionales, Saber 11, los peores índices se obtienen en la competencia matemática y, en particular, en el componente geométrico-espacial, identificándose con claridad cuestionamientos que giran en torno a la educación geométrica.

La educación de la geometría debe ser capaz de articular diferentes dimensiones y áreas del conocimiento. La historia, el arte y la tecnología ensamblados a través de los 17 grupos cristalográficos con el objetivo de propiciar mejoras en la enseñanza y aprendizaje, mediada por el software libre GeoGebra, generan interés en los educandos al estimular sus sentidos obteniendo con ello una percepción diferente al ver la aplicabilidad de la geometría en cosas tan

sencillas, como las tulas propias de la cultura Wayuu o, en formas consideradas patrimonio de la humanidad, como es el caso del palacio de La Alhambra ubicada en la ciudad española de Granada, elementos en los que se identifican los 17 grupos cristalográficos.

Vivimos en el mundo de la revolución tecnológica, un mundo que avanza cada vez más rápido, las distancias se disminuyen, el tiempo se acelera y las barreras caen. Las nuevas generaciones se encuentran en medio de esta revolución, se han adaptado a ella, y cada día que pasa se adhieren con mayor facilidad; los teléfono móviles, las redes sociales y una tienda virtual con un sinnúmero de aplicaciones potencializan su dependencia. Es el momento de usar esto a favor de los futuros docentes, proyectándose a la formación de estudiantes, que no son los mismos de hace un par de generaciones. Aplicar el uso de la tecnología en el aula aumenta el interés, motiva los sentidos, desarrolla la percepción y potencializa la aplicabilidad del contenido de una asignatura, como es la Geometría. En el Arte se pueden detectar fácilmente elementos geométricos: en el cubismo<sup>1</sup>, en Escher<sup>2</sup> y, en particular, en el palacio de La Alhambra se encuentran estampados los 17 grupos cristalográficos. Con esto y con la ayuda de los medios tecnológicos necesarios se puede hacer de la clase de Geometría una viva experiencia aplicable a un contexto real, generando un aprendizaje significativo.

“GeoGebra da la posibilidad de una variación de problemas para que el alumno explore de forma autónoma. Durante el proceso de solución, permite que aparezca la búsqueda y exploración de relaciones matemáticas, así como visualizar y explorar el significado de esas relaciones.” (Iturbe, 2013, p. 95), facilitando así la visualización, proceso que requiere un

---

<sup>1</sup> El cubismo fue un movimiento artístico desarrollado entre 1907 y 1914, nacido en Francia y encabezado por Pablo Picasso, que consistía en aplicar las formas geométricas en el arte.

<sup>2</sup> Artista neerlandés conocido por sus grabados xilográficos, sus grabados al mezzotinto y sus dibujos, que consisten en figuras imposibles, teselados y mundos imaginarios

fortalecimiento en los estudiantes de nuestro país, con ayuda de diferentes isometrías aplicadas en los 17 grupos cristalográficos.

Es por esto que se debe trabajar en la temática, además ofrece conocimientos básicos para asignaturas futuras, como es el caso del Álgebra abstracta, la teoría de grupos y brindan un desarrollo de la capacidad de análisis.

## CAPÍTULO II

### 5. Estado del arte

Benítez, N. (2011), docente de la Escuela Normal Superior Nuestra Señora de la Encarnación de Pasca (NSP) y de la Universidad de Cundinamarca (UDEEC) presenta un informe de su proyecto “Transformaciones Geométricas en el Arte”, con el cual ha participado exitosamente en eventos académicos logrando llegar a fase de finalistas.

En el proyecto intenta recrear la obra de Escher, teselados, mundos imaginarios y construcciones imposibles, mediante el uso del software *Cabry II plus*, estudiando las transformaciones geométricas que cada construcción requiere, creando una concepción arraigada de las isometrías de figuras planas, y de paso haciendo de cada estudiante un completo artista.

Con este proyecto dirigido a estudiantes de diferentes niveles de formación académica, (grado décimo de bachillerato de la NSP, estudiantes del programa de formación complementaria de la NSP y estudiantes de II semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Cundinamarca), logra establecer conocimientos en sus estudiantes que giran en torno a los elementos básicos de la geometría con ayuda del software *Cabry II plus* y de las obras del artista neerlandés Maurits Cornelis Escher.

Pérez Gómez, R. (2004) del Departamento de Matemática Aplicada en la Universidad de Granada durante la Semana Europea para la Ciencia y la Tecnología 2004, realiza una presentación de su estudio al palacio de La Alhambra.

En primera instancia presenta el palacio de La Alhambra de una forma maravillada, realizando énfasis en el marco histórico de este patrimonio para la humanidad, considerado así en 1984 gracias a sus logros artísticos únicos, además de ser un testimonio excepcional de

la España musulmana del siglo XIV. Explica cómo esta obra de arquitectura encierra dentro de sí mismo un libro de religión, historia, sociología y tecnología escrito con poesía y geometría ya que por motivos religiosos les era imposible hacer representaciones de Allah<sup>3</sup>, y recurrieron a esta rama de las matemáticas para decorar sus paredes, pasillos y techos; generando teselas básicas que con simetrías propias de cada grupo cristalográfico se extendían a lo largo del plano.

Luego realiza un recuento histórico acerca de los grupos cristalográficos y los debates que esta temática trajo consigo, en particular para los matemáticos que buscaron en diferentes culturas obras de arte con decoraciones periódicas, entre estas culturas se destacan el antiguo Egipto y La Alhambra de Granada, aunque en la primera tan solo se encontraron 12 de los grupos mientras que en el palacio se encontraron las 17 combinaciones posibles, aclarando con asombro que estas obras se realizaron antes del estudio matemático de los grupos cristalográficos.

El autor continúa realizando un análogo de diferentes lugares específicos de La Alhambra con los 17 grupos cristalográficos, para ello se apoya en imágenes fotográficas y en otras obtenidas por medios tecnológicos, para enfatizar en la riqueza geométrica de esta España musulmana del siglo XIV y finaliza generando distintos grupos a partir de una misma imagen pero aplicando diferentes transformaciones rígidas (Traslaciones, rotaciones, deslizamientos) para generar la celda unitaria que se extenderá a lo largo del plano usando traslaciones de la misma, en este punto se puede concluir que los grupos cristalográficos obedecen a las leyes de los grupos en el álgebra abstracta.

Iturbe, A. M., Ruiz, M. E., Pistonesi, M. V., & Fanitini, S. G. (2013) de la Universidad Nacional de Rionegro, Argentina, presentan un análisis que gira en torno a la implementación

---

<sup>3</sup> Vocablo utilizada por los musulmanes para referirse a dios

del software libre GeoGebra, para la enseñanza de la Geometría de la asignatura de matemáticas de primer año de la carrera de diseño.

Su análisis comienza presentando los argumentos por los cuales se debe replantear la enseñanza de la matemáticas en estos estudiantes de primer año de diseño, se basa principalmente en que llegan con poco conocimiento de la asignatura, falencias en el uso académico de la tecnología y además poca disposición para el área. Continúa su análisis realizando la presentación del software a trabajar, GeoGebra y, su relación con la aritmética y la geometría, por medio de una guía instructiva en la que el estudiante interactúa de forma directa con el software, permitiendo variabilidad en diferentes elementos geométricos con el objetivo de concebir conceptos invariables a pesar a la variabilidad de los datos, es este el caso de la razón aurea. Una segunda actividad que plantea es la de una construcción en GeoGebra inhabilitando algunos comandos, en pro de llevar a los estudiantes a usar transformaciones geométricas para concluir el curso con una transversalización entre la geometría y el arte haciendo uso del software.

Para la evaluación, presentan una propuesta seccionada en dos fases, la primera implica una serie de construcciones con tres distinciones marcadas, y para la segunda fase de tipo oral, una sustentación en la que se exponga el proceso a seguir para la realización de uno de los diseños realizados en la fase número uno.

Para concluir el análisis presentan una serie de consideraciones a tener en cuenta para el uso efectivo del software como es el caso no quedarse únicamente en la parte visual sino que también se maneje la construcción, además del papel que debe desarrollar el docente como ente promotor de cuestionamientos asertivos en los momentos indicados, con el fin de

generar discusión para que los estudiantes se animen a plantear y justificar su posición, llevando en muchos momentos a resultados inesperados , pero sustentados de forma correcta.

Iturbe, A., & Ariagno, C. (2007) docentes de matemáticas de la carrera profesional Diseño de Interiores y Mobiliario en la Universidad Nacional de Rionegro, Argentina, generan un análisis en el que aplican conceptos geométricos a diferentes elementos del diseño arquitectónico de estructuras como es el caso de “Place de la Concorde” París, señalando claramente las simetrías en un comienzo como sinónimo de belleza y armonía y luego usada como la similitud entre las partes que se encuentran en lados opuestos a un eje.

Luego realiza una descripción superficial de: los grupos de simetría de Leonardo<sup>4</sup>, utilizados con gran ahínco en el renacimiento especialmente en las capillas, los grupos de simetrías de los frisos, que constan de un módulo que se repite a lo largo de tira rectangular, y son visuales en la ornamentación clásica y, los grupos de simetría del plano, que son los conjuntos de transformaciones geométricas para recubrir el plano, llevando con esto a la teoría de mosaicos.

En la teoría de mosaicos se basa en las obras del pintor neerlandés Escher y en las decoraciones geométricas que se encuentran en La Alhambra realizando algunas descripciones geométricas de estas obras de arte, encontrando por ejemplo centros de rotación de diferentes elementos y el orden de tales rotaciones, también identifica traslaciones y reflexiones atendiendo a su eje de simetría, realizando un énfasis en que hay grupos con más de un eje de simetría.

Ortiz, M. A. (2013), en su trabajo de maestría titulado “Las TIC y el aprendizaje de la geometría” presentado en la Universidad CEU Cardenal Herrera de Valencia, España. Realiza

---

<sup>4</sup> Un grupo de simetría  $S\{F\}$  de una figura plana  $F$ , se llama grupo puntual o de Leonardo, si es un grupo finito y existe un punto de  $F$  fijo por todos los elementos de  $S\{F\}$ . A ese punto se le llama centro de simetría de la figura  $F$ .

un recorrido enfatizando en la potencia que brinda las TIC a la educación y en particular el software libre GeoGebra en la clase de matemáticas.

Inicia su trabajo dando a conocer la importancia de usar las TIC en el aula de clase, apoya este argumento en diferentes reglamentaciones legales educativas de sus país, pues el mundo de la actualidad es un mundo tecnológico, y los jóvenes de hoy día han nacido en medio de esta revolución, son nativos digitales, y manejan estos recursos en casi todas las actividades de su diario vivir.

Luego realiza un énfasis en el área de Geometría y varios ejemplos de software de geometría dinámica, siendo estos: Cabry, Sketchpad, Cinderella, GeoGebra, Regla y compás, Geonext y Kig. Evalúa uno por uno los software, basado en la categorización que brinda Miranda y los cambios que han tenido desde aquella sistematización, descartando aquellos que tienen un funcionamiento comercial, los que funcionan en un sistema operativo de difícil acceso y aquellos que manejan un interfaz complejo; Siendo GeoGebra un software ideal para trabajar.

Continúa su trabajo presentando el software: cómo nació, el manejo del interfaz, las características del programa, las ventajas en el aula de clase, las competencias que puede llegar a desarrollar etc. Finalmente expone de forma detallada una experiencia de aula con el uso de este software, la práctica se lleva a cabo en el Colegio Sagrada Familia en el nivel de 4° ESO de matemáticas, con una totalidad de 18 estudiantes que presentan un bajo nivel de interés y de participación, la actividad nace inicialmente con realización de un taller de forma manual y se continúa con la verificación del mismo mediante el uso del recurso, permitiendo la manipulación de los objetos construidos, y la obtención de conclusiones no sólo de índole académico sino también motivacional. Presenta los resultados en un cuadro de evaluación

generado por el “Proyecto Gauss”<sup>5</sup>. Concluye su experiencia con algunas observaciones de los estudiantes y recalca la importancia del uso de las tecnologías en las diferentes aulas, pues como docentes nos debemos adaptar a los avances de la sociedad y a la demanda en cuanto a los procesos de enseñanza.

Alcaide, J. (2016), en su trabajo, Enseñanza de la geometría utilizando las TIC y materiales manipulativos como recurso didáctico en 4º de primaria, aspirando a la titulación de “Grado de Maestro en Educación de Primaria” de la Universidad Internacional de la Rioja en Girona, España. Genera una propuesta en la que utiliza diferentes software como los son: CaRMetal, GeoGebra, GIMP, Krita, SketchUp; y materiales manipulables, como los siguientes: Foamy, geoplano cuadrangular, geoplano circular y el geoplano isométrico. La población sobre la cual se aplica la propuesta consta de 19 estudiantes en una clase y de 22 en la otra; de lengua catalán, a pesar de ser una zona con alto índice de migración, especialmente de Sudamérica.

El autor implementa la estrategia por medio de diferentes unidades didácticas que aplica en cada una de sus sesiones, generando ya sea un producto real o uno virtual utilizando alguno de los medios mencionados anteriormente. Generando así el interés de sus estudiantes motivados por una estrategia de enseñanza diferente a la tradicional.

Para concluir su trabajo recalca los aprendizajes obtenidos por sus estudiantes, y la facilidad que el software ha aportado para el proceso de enseñanza-aprendizaje, además de que los estudiantes fueron capaces de comprender las temáticas a abordar por el docente, trascendieron su percepción de la geometría a otras dimensiones.

---

<sup>5</sup> Es un Proyecto generado por el Instituto de tecnologías educativas y de Formación del profesorado (INTEF) que brinda al gremio docente varios centenares de ítems didácticos y de applets de GeoGebra, que cubren todos los contenidos de matemáticas de Primaria y de Secundaria.

## 6. Marco Teórico

Los aspectos más relevantes a trabajar a lo largo del proyecto y sus fundamentos se encuentran a continuación:

### Uso de las TIC en la educación

“Las tecnologías de la información y la comunicación TIC nacieron en 1958 en EE.UU utilizando los ordenadores como programas para la educación” (Espinosa, 2017, pp. 2), como se deja ver tiene su origen en la actual potencia mundial, y al mismo tiempo en diferentes países del mundo, que buscaban el desarrollo educativo además, de apuntarle a la evolución de las empresas. Hoy en día, pleno siglo XXI, siglo que se encuentra envuelto en una revolución tecnológica, y las actividades humanas se encuentran inmersas en estos avances. Tecnologías de fácil acceso y sencilla manipulación hacen que, la información se difunda con mayor facilidad y tenga una cobertura realmente amplia.

“Las TIC conforman el conjunto de recursos necesarios para manipular la información: Los ordenadores, las redes (Hardware) y los programas informáticos (Software) necesarios para convertirla, almacenarla, administrarla, transmitirla y encontrarla” (Ramírez, 2013, pp. 7) esto hace que la educación tenga un gran salto dirigido a potenciar los procesos de enseñanza-aprendizaje, pues con el fácil acceso a la información los procesos académicos cambian y, los roles tanto del docente como del estudiante toman un camino de mayor participación e interés.

“Con el avance de la TIC, la educación y la forma de adquirir y generar conocimiento ha ido evolucionando; desde un maestro de salón de clase y un estudiante pasivo y receptivo, ha evolucionado a un tutor y facilitador del conocimiento y un estudiante activo y generador de nuevo conocimiento, en donde la información, gracias al internet y las comunicaciones en red, está al alcance de todos y es compartida por todos, donde el conocimiento es generado en base a la

información captada y procesada por las personas” (Ramírez, 2013, Las TIC en el ámbito laboral, pp. 36)

### **Recurso Educativo Abierto (REA)**

“El movimiento de los recursos educativos abiertos (REA) persigue la libre difusión de materiales y recursos educativos para ser reutilizados en la enseñanza y aprendizaje de forma gratuita” (Posada, 2014), en este ámbito se incluyen guías, talleres, cursos, videos, software... cualquier medio tecnológico que además de ser gratuito el fin es favorecer los procesos de enseñanza aprendizaje.

Las características de los REA son entre otras la fácil accesibilidad, modificabilidad para darle diferentes usos, acceso desde diferentes sistemas operativos y correcto funcionamiento con el cambio de las versiones del software. Esto permite de alguna forma la trascendencia del recurso, realizando invaluable aportes a los diferentes niveles de ámbito académico.

En todo el mundo se están implementando los REA, a nivel global Europa con el programa “Open Education Europa”, pretende establecer una plataforma gratuita alimentada por las diferentes instituciones educativas del continente. España con su propuesta “Centro Nacional de Desarrollo Curricular en Sistemas No Propietarios” quiere fomentar el diseño y la promulgación de material educativo digital y “El proyecto Gauss” de igual forma español, es un Proyecto generado por el Instituto de tecnologías educativas y de Formación del profesorado (INTEF) que brinda al gremio docente varios centenares de ítems didácticos y de applets de GeoGebra, que cubren todos los contenidos de matemáticas de Primaria y de Secundaria.

## **Pensamiento espacial**

“El pensamiento espacial o razonamiento espacial, es una habilidad que tenemos por lo menos la mayoría de las personas de visualizar algo inexistente, crearlo y poder manipularlo en el "espacio" típico” (Cristina, 2012), comprendido de esta forma es una capacidad mental de concebir elementos sin tener la necesidad de presenciarlos de forma real, y manipularlos a través del espacio idealizado.

De esta forma podemos obtener dos tipos de conocimiento, basados en la importancia y la aplicación de los mismos en contextos reales: El primer tipo de conocimiento es el genérico, que maximiza las competencias para la vida y el segundo es el no genérico que son más técnicos y poco trascendentales en contextos cotidianos.

“La moderna investigación sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico indica que éste sigue una evolución muy lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales, aunque los niveles finales corresponden a niveles escolares bastante más avanzados que los que se dan en la escuela.” (Kleber, 2013)

El desarrollo del pensamiento espacial permite no solamente resolver problemáticas de la geometría sino que corrobora con el avance del pensamiento lógico, y esto brinda una mayor cobertura de aplicaciones, pues se es más fácil obtener conclusiones con procesos deductivos e inductivos siempre que los razonamientos sean claros y lógicos.

## **Semilleros de investigación**

Según el Acuerdo 002 de Marzo de 2008 por el cual se establece el Sistema de Investigaciones en la Universidad de Cundinamarca, los Semilleros de Investigación son definidos como: “aquellos grupos en los cuales los estudiantes, bajo la orientación de docente investigadores, se inician en el proceso conducente al conocimiento de los problemas que

interesa investigar en su área”, estos espacios generados con el fin de promover la investigación.

Estos espacios son necesarios en ámbitos académicos de nivel universitario, ya que promueve a la investigación voluntaria sin que los estudiantes se preocupen por el afán de medir su avance de forma cuantitativa, como sucede en muchos casos con las asignaturas propias de su carrera profesional.

## **CAPÍTULO III**

### **7. Institución Educativa donde se implementó**

La institución educativa donde se llevó a cabo el proyecto es en la Universidad de Cundinamarca, en su sede principal ubicada en Fusagasugá, Cundinamarca.

La Universidad de Cundinamarca nace como el Instituto Universitario de Cundinamarca (ITUC), en 1969 mediante la ordenanza 045 de diciembre 19, que le da la capacidad de iniciar labores académicas el 1 de agosto del siguiente año con los programas de Tecnología Agropecuaria, Tecnología Administrativa y Secretariado Ejecutivo; en 1971 se autoriza la creación del programa ciencias de la educación, pero es hasta el segundo semestre de 1972 que nace la carrera de matemáticas a nivel de tecnológico junto con el tecnólogo de la administración educativa. Atendiendo a la acogida por parte de la comunidad se abren espacios en diferentes municipios del departamento, como son el caso de Ubaté y Girardot, en donde se implementan diferentes programas atendiendo a las necesidades sociales.

Es en 1990 que el ITUC solicita un cambio de nombre para pasarse a llamar: Universidad de Cundinamarca, dicho cambio le es otorgado en el año 1991, y este nuevo status generará ampliar su presencia en diferentes municipios a nivel departamental: Facatativá (1994), Chía (1999), Chocontá (1999), Zipaquirá (1999) y Soacha (2000).

### **8. Contexto sociocultural**

Los estudiantes de la línea de pensamiento geométrico, en la Universidad de Cundinamarca, ubicada en el municipio de Fusagasugá, Cundinamarca provienen de diferentes municipios del departamento y de otros del país, en su mayoría de hogares humildes, con lengua materna castellana. Son egresados de instituciones educativas con gran variedad en cuanto a sus procesos de formación y los perfiles educativos.

## **9. Perfil de los beneficiarios**

La población sobre la que se va a aplicar el recurso educativo una vez que fue diseñado, son los estudiantes de la línea de pensamiento geométrico de la Licenciatura en Matemáticas de la UDEC, en Fusagasugá, Cundinamarca; a lo largo del segundo semestre del año 2017 y primer semestre del año 2018.

Los estudiantes de la línea de pensamiento geométrico, en la Universidad de Cundinamarca, en su gran mayoría son personas consecuentes con la realidad, comprometidos con todas y cada una de sus responsabilidades, capaces de proyectarse a un futuro en el que las mentes de las próximas generaciones se encontrarán en sus manos, críticos en un país que lo amerita, capaces de innovar procesos educativos involucrando directamente al niño y consiguiendo con esto un aprendizaje significativo.

Con talentos individuales pero conscientes de sus debilidades, capaces para fortalecerlas y aumentar su nivel competitivo; reflexivos en cuanto a la incursión de la tecnología en la actual sociedad y su importancia en la educación como medio facilitador de los procesos de enseñanza.

## **10. Nivel educativo**

El nivel educativo sobre el cual se desea implementar el proyecto es en el nivel de educación superior, específicamente en la facultad de educación, programa de matemáticas, línea de pensamiento geométrico.

## **11. Asignaturas involucradas**

Las asignaturas consideradas dentro del pensum de la licenciatura de matemáticas involucradas son en principio el pensamiento geométrico, que es la naturaleza del proyecto,

sin embargo su aplicación también deriva en procesos que apoyan materias como son el caso de pensamiento lógico, práctica docente I, práctica docente II y álgebra abstracta I.

## **12. Temas principales**

El listado de temáticas es amplio, sin embargo los temas principales a abarcar se presentan a continuación:

Isometrías en el plano.

Los 17 grupos cristalográficos

Los 17 grupos cristalográficos en la cultura Nazarí y en el arte

## **13. Método de trabajo**

El proyecto se desarrolló de la siguiente manera:

1. Revisión bibliográfica: Se realiza una búsqueda de información de diferentes fuentes: revistas, trabajos de grado, páginas web, documentos académicos... en su gran mayoría de entes extranjeras, pues es realmente poco el material colombiano que se encuentra al respecto.

2. Diseño del REA: Se construye el REA de los 17 grupos cristalográficos, con ayuda de del software GeoGebra.

3. Implementación del REA: Se abre un tiempo y un espacio académico para desarrollar y aplicar el recurso en los estudiantes de la línea de pensamiento geométrico de la Licenciatura en Matemáticas de la UDEC, en Fusagasugá, Cundinamarca.

4. Evaluación: Se realiza la evaluación de la utilización del recurso para la visualización de los 17 grupos cristalográficos y su aplicación en el arte.

### 13.1 Diseño del REA

Para el diseño de REA se decide trabajar con la aplicación GeoGebra, software creado por el matemático austríaco y profesor de la Universidad Johannes Kepler de Linz, Markus Hohenwarter. Las razones por las que se decide abordar el proyecto con este software se presentan a continuación:

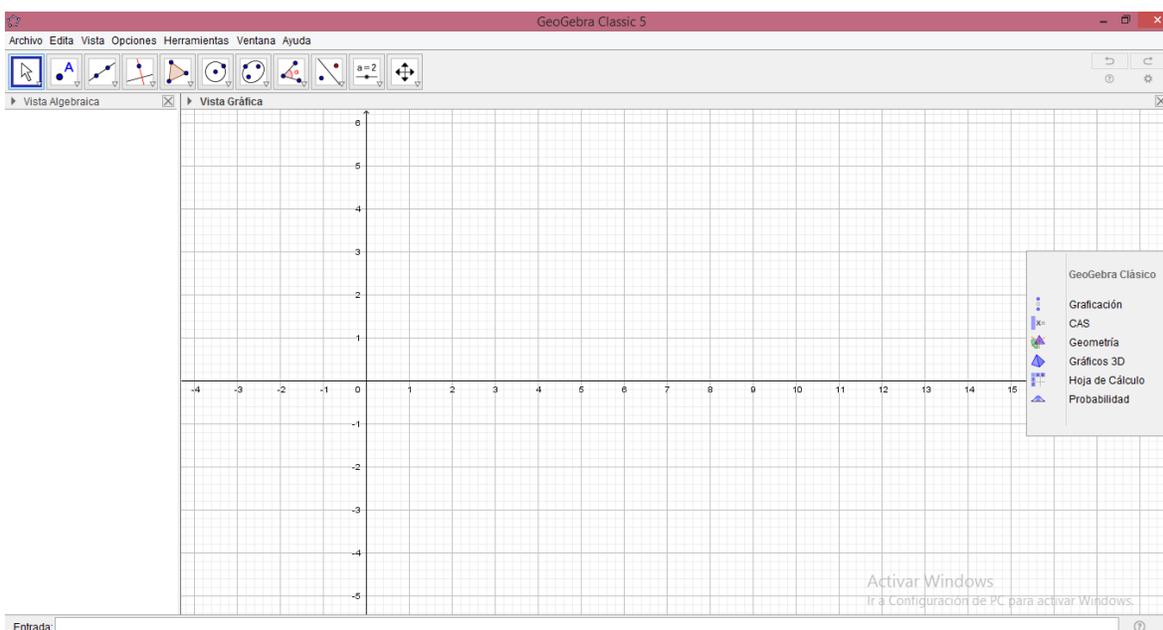
- Es gratuito y de fácil acceso.
- Disponible en las plataformas de PC y Mac.
- Disponible en diferentes sistemas operativos: Windows, Mac y Linux.
- Permite crear páginas web.
- Posee un interfaz sencillo
- Tiene diferentes vistas, que permiten una fácil manipulación de los objetos, y una

multifuncionalidad de acuerdo a la necesidad del usuario:

- Vista algebraica
- Hoja de cálculo
- Cálculo simbólico
- Vista gráfica
- Vista gráfica 2
- Vista gráfica 3D
- Protocolo de construcción
- Cálculos de probabilidad
- Permite trabajar on-line y off-line.
- Facilita el diseño del REA usando la versión en línea.

➤ Tiene demasiados comandos por cada vista, facilitando la edición y manipulación dinámica de los mismos en tiempo real.

Para trabajar en la versión en línea, se puede acceder al siguiente link [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org), mediante el cual se puede trabajar en el software, se sugiere crear una cuenta gratuita para poder acceder a los grupos académicos de GeoGebra. La segunda forma para trabajar en GeoGebra, es desde el ordenador, la aplicación se descarga siguiendo el siguiente enlace: <https://geogebra.softonic.com/>; esta aplicación no requiere de internet para su funcionamiento.



### Ilustración 1: Interfaz de geogebra 5.0

Para el diseño de los 17 grupos cristalográficos, hubo apoyo en el software “Teselación-Marcel-Morales” con el fin de identificar las estructuras propias de cada grupo cristalográfico. Todos los grupos se crearon con el fin de permitir la fácil visualización de las características y de las transformaciones geométricas de cada grupo, por ello se usan los

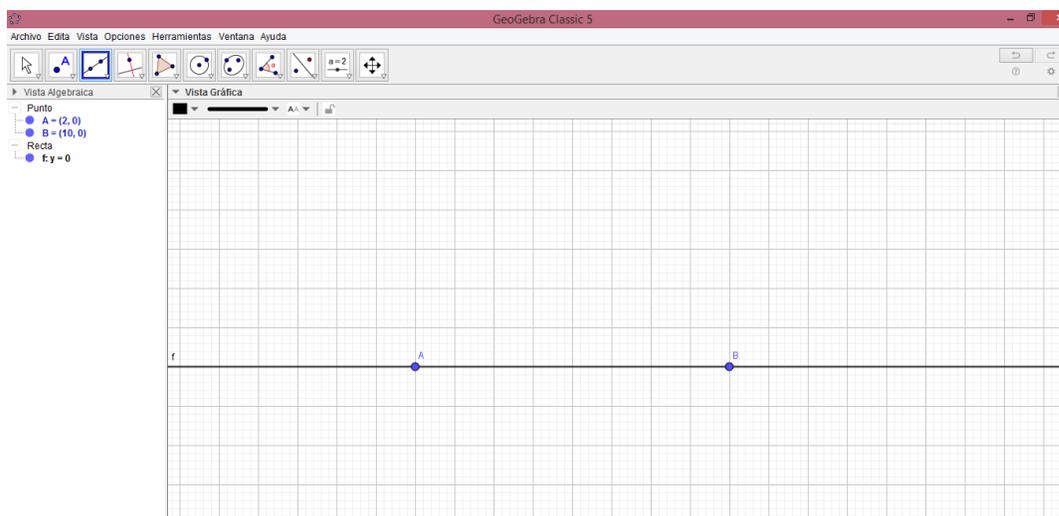
comandos de: Deslizador  $a=2$  y Casilla de control   , y una guía de construcción que, facilitará el proceso para la identificación y la construcción del mismo.

Para profundizar en el método de construcción de cada uno de los 17 grupos cristalográficos, se explica en el siguiente capítulo el proceso para construir uno de los grupos. He de aclarar que en este proceso se utilizan los comandos antes mencionados como requisito para mejorar la visualización de las transformaciones geométricas en cada grupo, pero los estudiantes no tendrán que crear estas herramientas para la creación del grupo cristalográfico.

### 13.1.1 Construcción del grupo p1

El grupo p1 cuenta con traslaciones para su diseño, veamos:

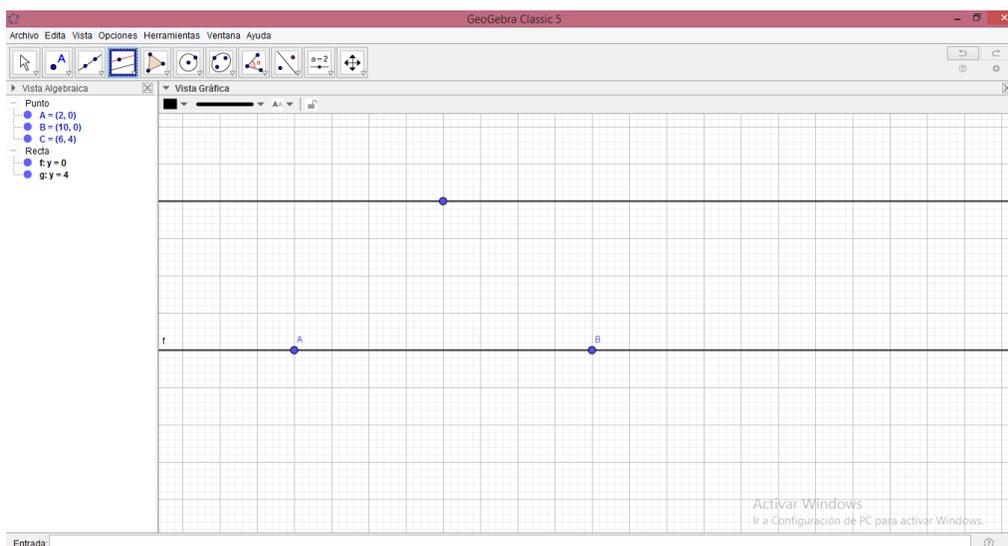
➤ Paso 1: Se inicia construyendo una recta con el comando “Recta”, para ello se colocan dos puntos en el plano, aplicando el primer postulado de la geometría euclidiana: “Dados dos puntos se puede trazar una recta que los une.



**Ilustración 2: paso 1 construcción del grupo p1**

Obsérvese que en la parte izquierda de la pantalla aparecen los elementos creados escritos de forma algebraica.

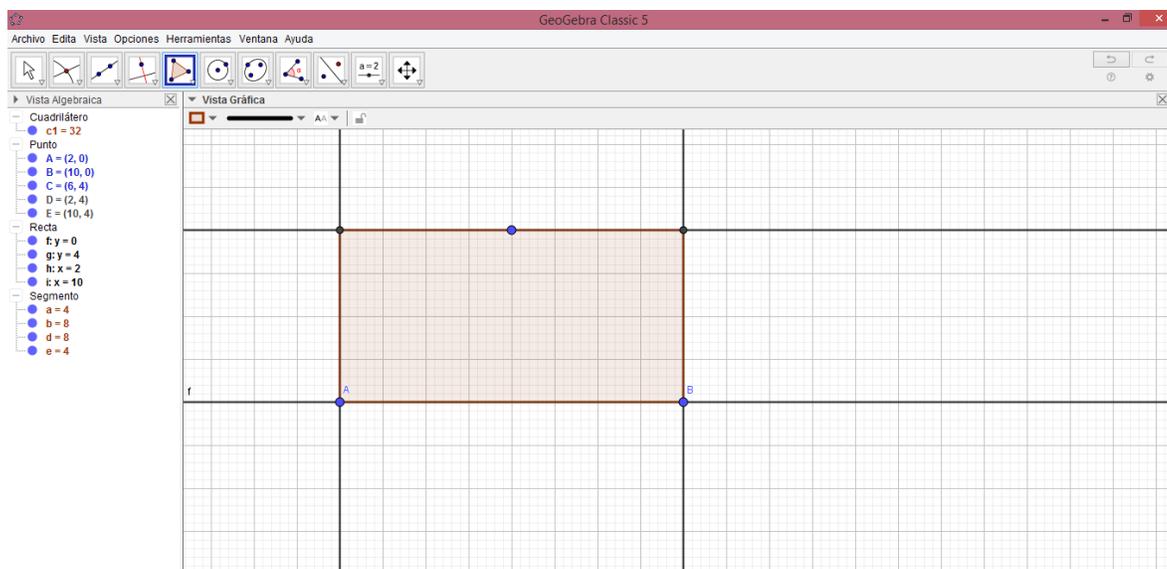
➤ Paso 2: Construir una recta paralela a la recta construida, con el comando “Paralela”, para ello se selecciona la recta construida y un punto externo a la misma, de nuevo atendiendo al quinto postulado de Euclides: “Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada”.



### Ilustración 3: Paso 2 construcción del grupo p1

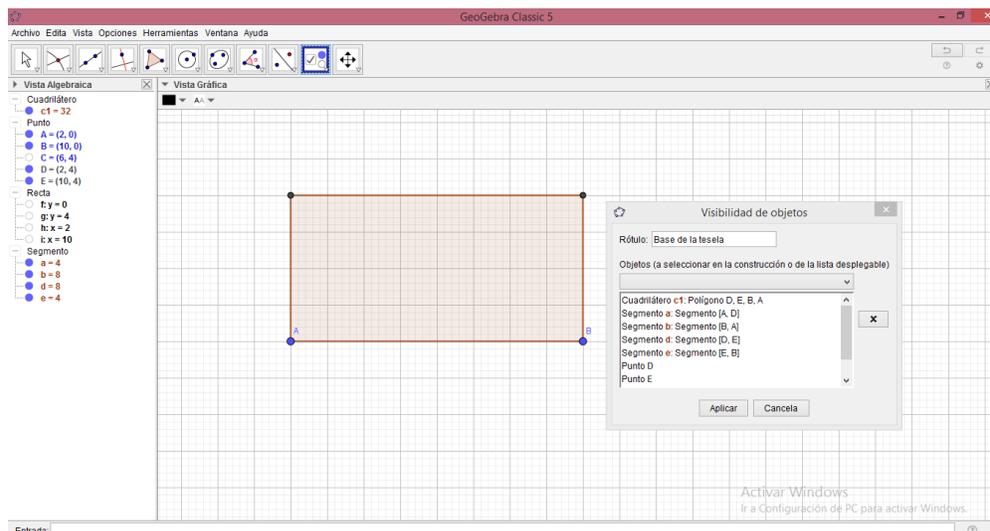
➤ Paso 3: se construyen dos rectas perpendiculares, se identifican los puntos de intersección y se construye el polígono que, servirá de base para la tesela<sup>6</sup>

<sup>6</sup> La tesela es una pequeña pieza de piedra, terracota o vidrio coloreado que se utiliza para confeccionar un mosaico

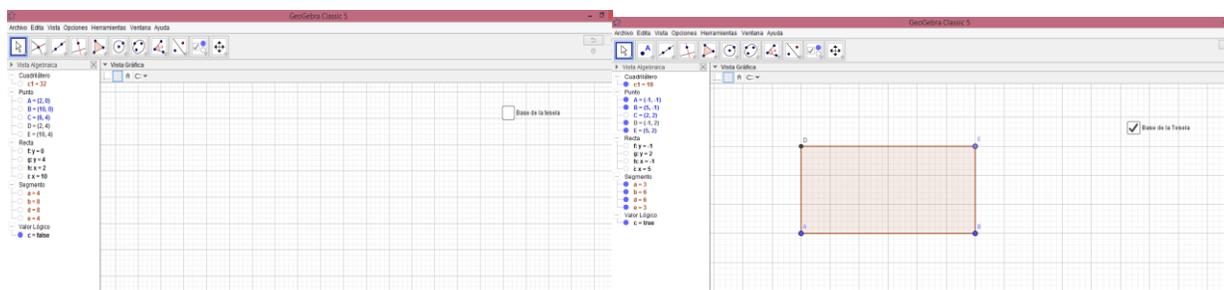


#### Ilustración 4: paso 3 construcción del grupo p1

➤ Paso 4: Ocultar las rectas trazadas, desactivando la opción de visibilidad que presenta la vista algebraica, y encasillar la base de la tesela en una casilla de entrada, para ello en el cuadro de diálogo se deben seleccionar todos los elementos que conforman al polígono (puntos, segmentos y el polígono en sí).

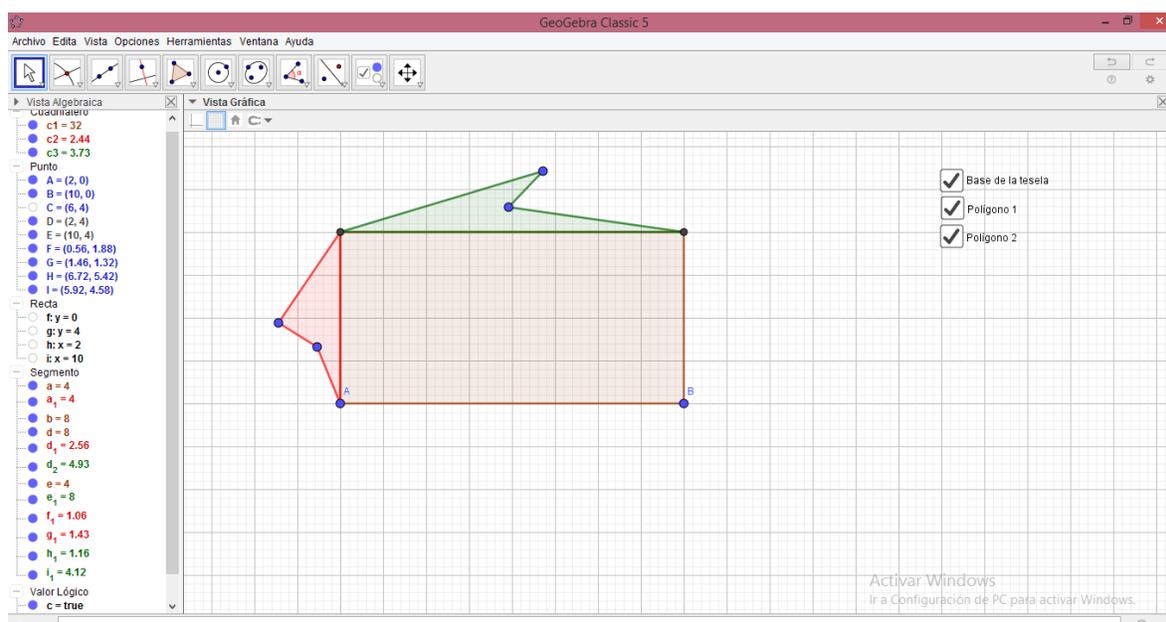


#### Ilustración 5: paso 4 construcción del grupo p1



**Ilustración 6: Aplicación de la casilla de control sobre el polígono base**

➤ Paso 5: se construyen dos polígonos, uno en la parte lateral izquierda del rectángulo y el segundo en la parte superior de la base. Se encasillan cada polígono por separado.

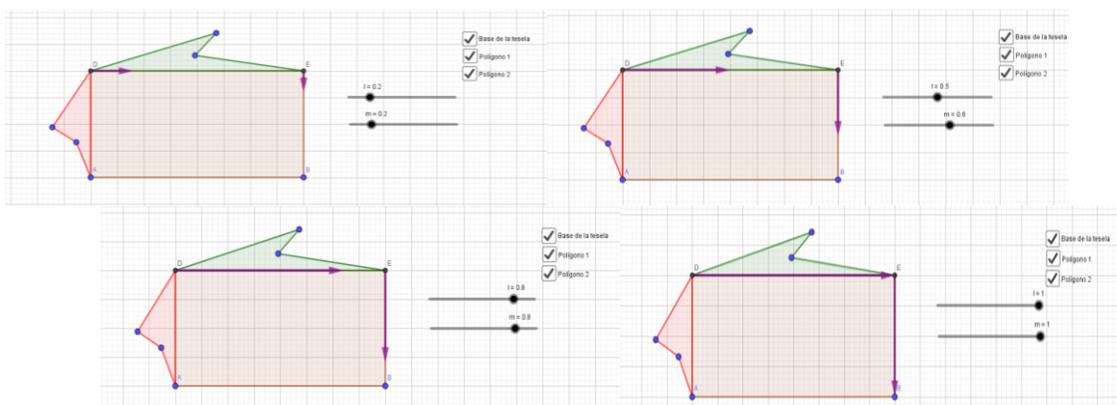


**Ilustración 7: paso 5 construcción del grupo p1**

➤ Paso 6: Crear los vectores de traslación por utilizando deslizadores, para esto primero se crean los deslizadores (“l” y “m”) en formato de número, pues también maneja la opción de ángulo, y posterior a esto se crea el vector con ayuda de la bandeja de entrada, localizada en la parte inferior de la ventana, los siguientes fueron los comandos utilizados para el diseño de los dos vectores:

Vector  $(D, lE + (1 - l)D)$

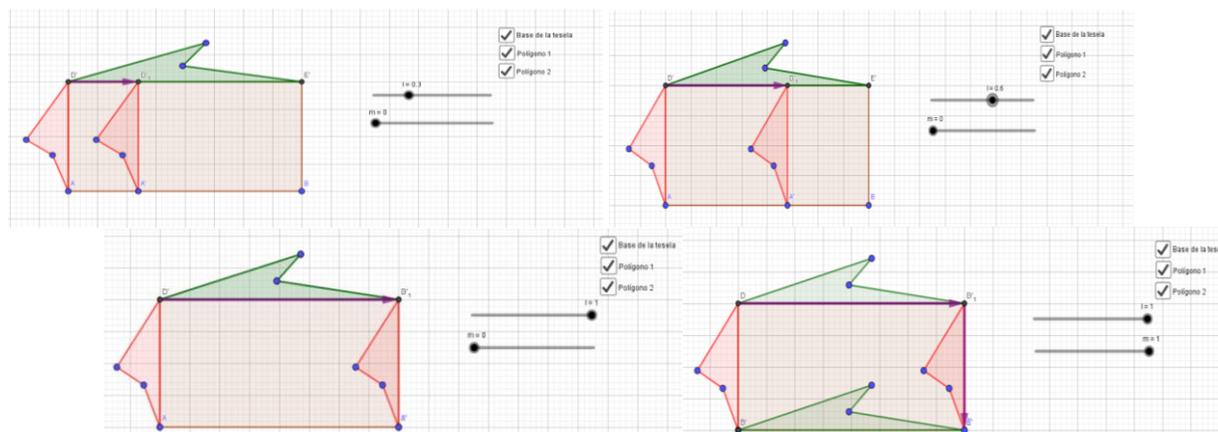
Vector  $(E, m B + (1 - m) E)$



**Ilustración 8: Paso 6 construcción del grupo p1**

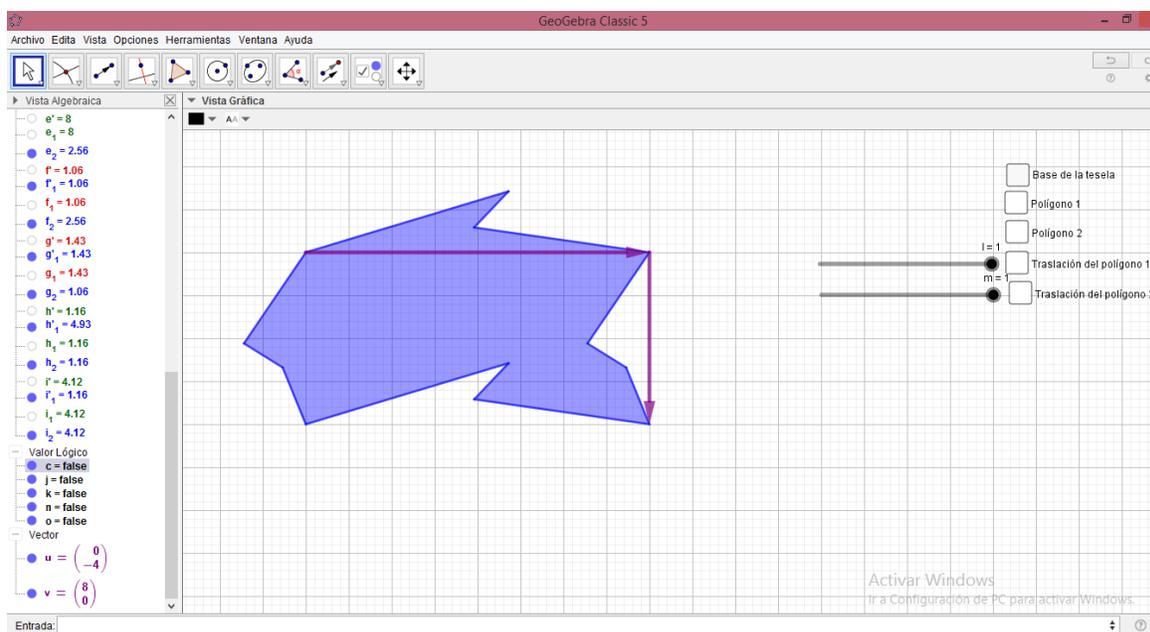
Como se observa en la Ilustración 8: Paso 6 para la construcción del grupo p1, los vectores construidos dependen de los deslizadores.

➤ Paso 7: Se trasladan los polígonos construidos en el paso 5 a través de los vectores diseñados en el punto anterior y encasillarlos.



**Ilustración 9: paso 7 construcción del grupo p1**

➤ Paso 8: construir la tesela con las transformaciones realizadas, desactivar todas las casillas anteriores dejando así solo la tesela y los vectores que también deben encasillarse.



**Ilustración 10: paso 8 construcción del grupo p1**

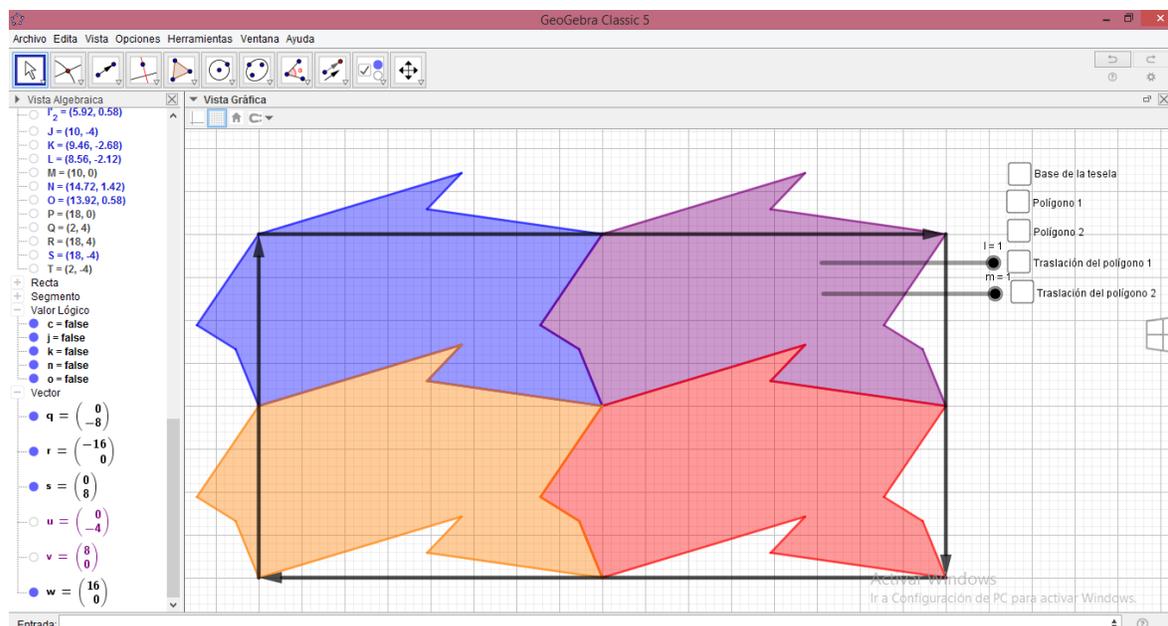
A continuación, se presenta una tabla que resume las transformaciones necesarias para la creación de la tesela.

**Tabla 1 Análisis de la tesela del grupo p1**

<b>ANÁLISIS DE LA TESELA</b>						
<i>Grupo Cristalográfico</i>	<i>Forma de la base de la tesela (FBT)</i>	<i>Rotaciones</i>		<i>Traslaciones</i>	<i>Simetría axial</i>	<i>Simetría central</i>
		<i>SI</i>	<i>Orden</i>			
<b>P1</b>	Rectángulo	No	—	Si	No	No

➤ Paso 9: se traslada la tesela con respecto a los vectores construidos hasta, y con respecto a la suma de los dos, creando así la prototesela<sup>7</sup>. Además se diseñan los vectores de traslación de la prototesela.

<sup>7</sup> Combinación mediante transformaciones geométricas de la tesela, para construir la unidad fundamental del grupo cristalográfico.



**Ilustración 11: paso 9 construcción del grupo p1**

En la tabla 2 Análisis de la prototesela, se presenta un resumen de las transformaciones geométricas necesarias para la creación de la prototesela del grupo p1.

**Tabla 2 Análisis de la prototesela**

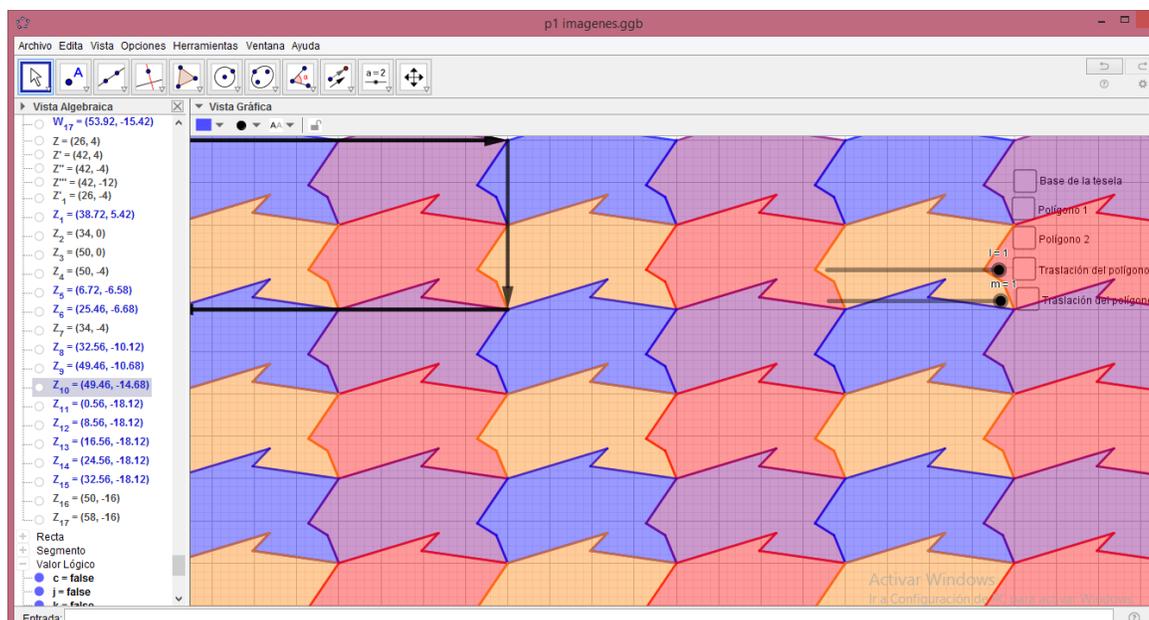
<b>ANÁLISIS DE LA PROTOTESELA</b>						
<i>Grupo Cristalográfico</i>	<i>Forma de la Prototesela (FP)</i>	<i>Rotaciones</i>		<i>Traslaciones</i>	<i>Simetría axial</i>	<i>Simetría central</i>
		<i>SI</i>	<i>Orden</i>			
<b>P1</b>	Rectángulo	No	--	Si	No	No

Como se puede observar la prototesela del grupo cristalográfico p1 solo tiene traslaciones, no posee ni rotaciones ni simetrías de ningún tipo. Pero su forma guarda una relación con la forma de la base de la tesela, como se ilustra en la tabla 3.

**Tabla 3 Relación entre FBT y FP**

<i>Grupo Cristalográfico</i>	<i>Relación entre Forma de la Base de la Tesela y Forma de la Base de la Prototesela</i>
<b>P1</b>	<i>La base de la Tesela es un cuarto del rectángulo que forma la prototesela.</i>

Finalmente se crea el mosaico trasladando la prototesela con los vectores finales.



**Ilustración 12** Mosaico correspondiente al grupo  $p1$

### 13.1.2 Imagen del mosaico

GeoGebra tiene la facilidad de exportar los proyectos realizados en diferentes formatos como los son:

- Hoja dinámica como página web
- Vista gráfica a imagen (png, eps...)
- Vista gráfica a GIF animado
- Vista gráfica al portapapeles

Para el desarrollo del proyecto se exportará la vista gráfica como imagen en formato png, dado que el mosaico en GeoGebra desacelera el programa por la cantidad de elementos que están presentes en el documento.

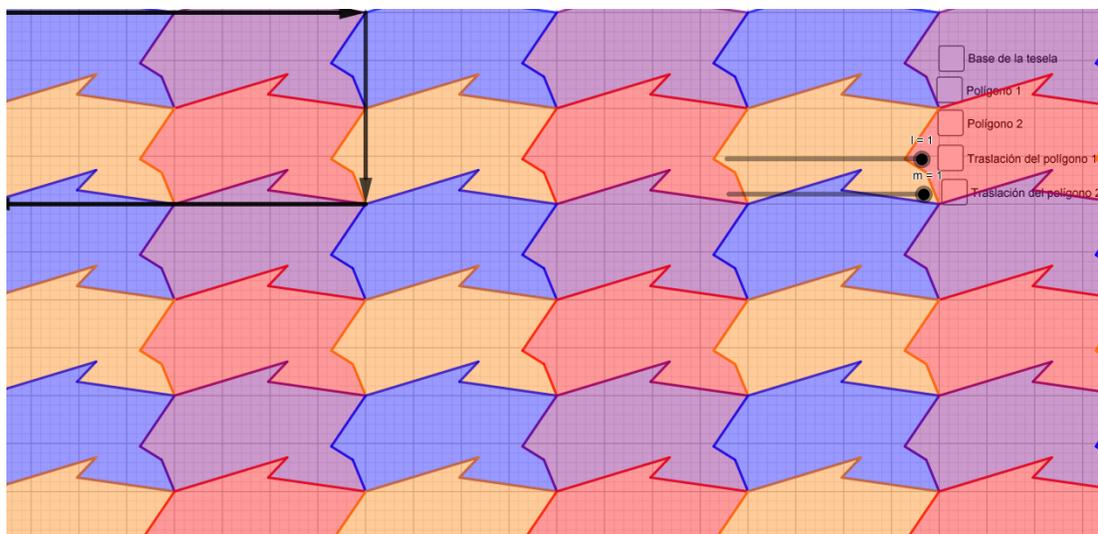


Ilustración 13 Mosaico en formato png extraído de GeoGebra

### 13.1.3 Guía de construcción

Para cada grupo cristalográfico se realiza un formato de guía que facilita el manejo del recurso, dirige la manipulación de las casillas de control y orienta su creación desde la aplicación.

Un ejemplo de las guías se presenta a continuación:

## CONSTRUCCIÓN DE LOS GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS

### GRUPO $p1$

Abra el archivo “*Grupo p1*”, en la parte derecha se encuentran las casillas de control



por medio de las cuales podrá ver y dejar de ver objetos con tan solo un clic.

**1.** Active la casilla “*Base de la tesela*” y podrá ver la base de la tesela: un

rectángulo, que puede construir con la opción *polígono* 

**2.** Active la casilla “*Trazo 1*” podrá ver un polígono que nace en el punto inferior izquierdo de la base de la tesela, detalle que los últimos lados del polígono equivalen al segmento lateral izquierdo del rectángulo, de igual forma puede construir el polígono con la

opción *polígono* , recuerde que para cerrar el polígono debe terminar dando clic al mismo punto donde inició.

**3.** Active la casilla “*Trazo 2*” podrá ver un polígono que nace en el punto superior izquierdo de la base de la tesela, detalle que el último lado del polígono equivale al segmento superior de la Base de la Tesela, de igual forma puede construir el polígono con la opción

*polígono* , recuerde que para cerrar el polígono debe terminar dando clic al mismo punto donde inició.

**4.** Active la casilla “*vectores para La Tesela*” y observará dos vectores, uno nace en el punto de la parte superior izquierda y finaliza en el punto de la parte superior derecho de la base de la tesela y el otro nace en el punto de la parte superior derecha y termina en el punto

de la parte inferior derecha de la base de la tesela, use la herramienta *vector*  para crearlo.

5. Active la Casilla “*Traslación de T1*” y mueva el deslizador totalmente de izquierda a derecha, observe cómo T1 se mueve a través del vector creado en posición

horizontal, use la herramienta *traslación*  y de clic sobre T1 y a continuación sobre el vector creado.

6. Active la Casilla “*Traslación de T2*” y mueva el deslizador totalmente de izquierda a derecha, observe como T2 se mueve a través del vector creado en posición

vertical, use la herramienta *traslación*  y de clic sobre T2 y a continuación sobre el vector creado.

7. Active la casilla “*Tesela 1*” y observe el polígono creado a partir de las construcciones anteriores, realice esto con la opción *polígono* 

8. Desactive las casillas “*Base de la tesela*”, “*Trazo 1*”, “*Traslación de T1*”, “*Trazo 2*”, “*Traslación de T2*”, esto implica que debe ocultar éstos elementos, use la opción

*mostrar/ocultar objeto*  para realizar esta acción.

9. Active la Casilla “*Tesela trasladada 2*” observe como Te1 se trasladó a través del *Vector horizontal*, use la herramienta *traslación*  y de clic sobre Te1 y a continuación sobre el vector, a éste polígono lo denotaremos como TTe1 (Traslación Tesela 1).

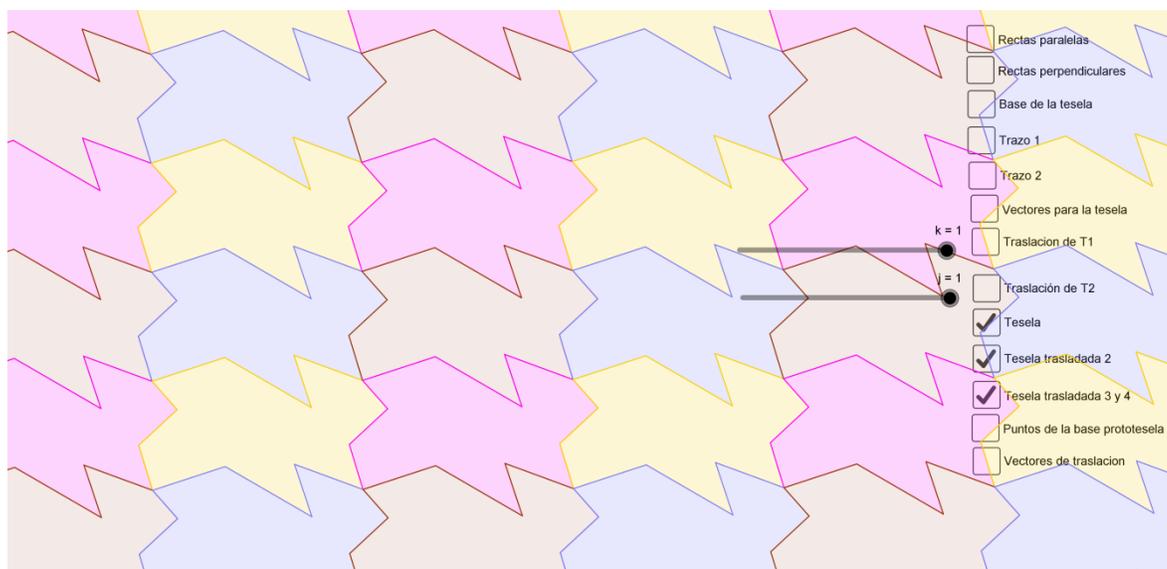
10. Active la Casilla “*Tesela trasladada 3 y 4*” observe como Te1 y Te2 se

trasladaron a través del *Vector vertical*, use la herramienta *traslación*  y de clic sobre Te1 y a continuación sobre el vector vertical, Repita el proceso con Te2, a estos polígonos los denotaremos como Te3 y Te4 (Tesela 3 y Tesela 4 respectivamente).

**11.** Desactive las casillas “Vectores para la tesela”, esto implica que debe ocultar

éstos elementos, use la opción *mostrar/ocultar objeto*  para realizar esta acción.

**12.** Active las casillas “Puntos de la Base Prototesela” y “Vectores de prototesela”, observe los vectores que aparecen, éstos son necesarios para crear el mosaico de estilo libre.



**Ilustración 14** Mosaico ejemplo del grupo cristalográfico  $p1$

Una vez contruidos los 17 grupos cristalográficos, se procede realizar una presentación con el objetivo de relacionar los grupos con expresiones artísticas de La Alhambra y de una obra de Escher.

Ya con todo el material diseñado se construye en REA con ayuda del software libre GeoGebra, que permite crear grupos académicos con mucha facilidad.

Como se mencionó anteriormente el recurso se diseña para aplicarse en estudiantes de la línea de pensamiento geométrico de la Licenciatura en Matemáticas de la UDEC, en Fusagasugá, Cundinamarca; a lo largo del segundo semestre del año 2017 y primer semestre del año 2018, por tal razón se crearon dos grupos. Para acceder a los grupos se debe crear una

cuenta gratuita en GeoGebra, luego ingresar al siguiente enlace [www.geogebra.org/groups](http://www.geogebra.org/groups) y digitar los códigos de entrada, que son: FSEF4 y FAGPD respectivamente.

### 13.1.4 Implementación del REA

El recurso se aplica a los estudiantes de la línea de pensamiento geométrico de la Licenciatura en Matemáticas de la UDEC, en Fusagasugá, Cundinamarca; a lo largo del segundo semestre del año 2017 y primer semestre del año 2018

#### *Segundo semestre 2017*

El desarrollo del proyecto se llevó al término de seis sesiones que se describen a continuación:

#### **Sesión I:** Adaptación al software

**Tabla 4 Descripción de la I, 2017 II Semestre**

LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRAFICOS ESTUDIADOS CON GEOGEBRA. ANÁLISIS EN EL ARTE DE CULTURAS ANCESTRALES Y CONTEMPORÁNEAS		
SESIÓN	DURACIÓN	LUGAR
I	120 minutos (60 con acompañamiento y 60 trabajo individual)	Sala de cómputo del bloque B de la UDEC
AGRUPACIÓN	RECURSOS	
Individual	Computadores con acceso a internet y GeoGebra instalada en el ordenador	
OBJETIVOS		
Dar a conocer el software a trabajar.		
Implementar algunos de los comandos del software en algunos ejercicios de aplicación.		

Adaptar al estudiante con el software, su interfaz y su manipulación en la vista geométrica.

## ACTIVIDADES

-Se inicia la sesión dando a conocer el proyecto, la intencionalidad y las herramientas de trabajo, que en este caso es el software libre GeoGebra.

-Los estudiantes deben crear una cuenta gratuita en GeoGebra, y acceder al grupo por medio del enlace y el código.

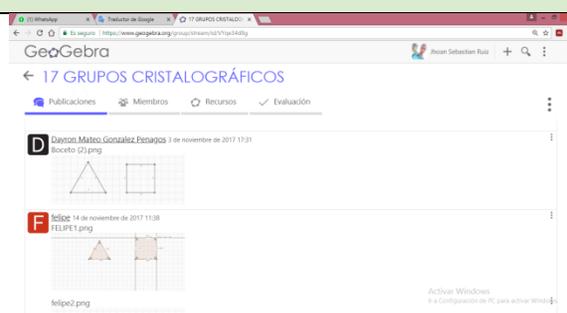
-Una vez en se encuentren al interior del recurso encontrarán un PDF titulado “Manual para GeoGebra. Guías para geometría dinámica, animaciones y deslizadores” de Alexander Borbón. Por medio del cual conocerán en el primer capítulo los comandos de la aplicación.

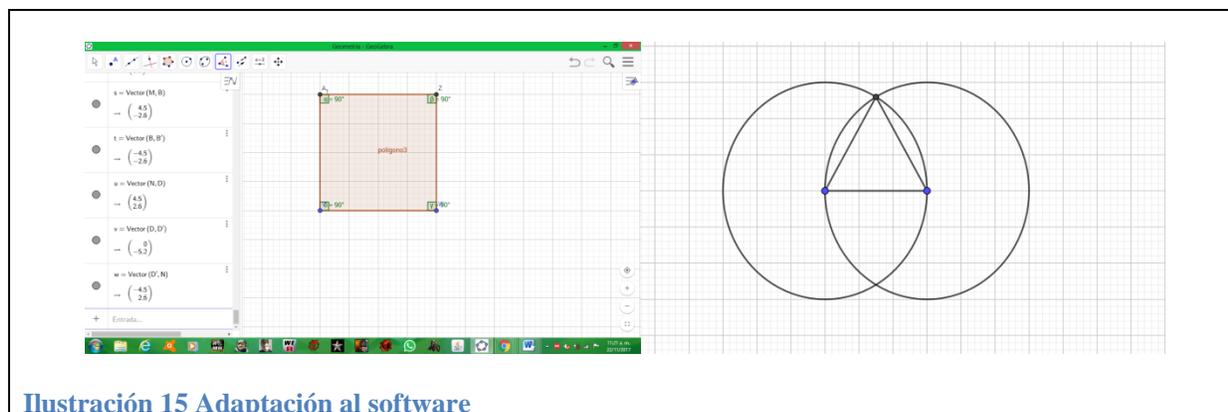
-Siguiendo el paso a paso del segundo capítulo de la guía, construirán en la aplicación: un triángulo equilátero, cuadrado, cuadrado con líneas de comando y una parábola.

-El resultado de su trabajo lo subirá a recurso en formato de imagen png.

## EVIDENCIAS

Pantallazo tomada del recurso con algunos de los trabajos realizados durante la primera sesión, se visualizan las actividades de Dayron Penagos, Felipe, Arlinzon Pardo y Cristian Gómez.





**Ilustración 15 Adaptación al software**

**Sesión II:** Construcción del grupo  $p1$

**Tabla 5 Descripción de la sesión II, 2017 II semestre**

LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRAFICOS ESTUDIADOS CON GEOGEBRA. ANÁLISIS EN EL ARTE DE CULTURAS ANCESTRALES Y CONTEMPORÁNEAS		
SESIÓN	DURACIÓN	LUGAR
II	120 minutos (60 con acompañamiento y 60 trabajo individual)	Sala de cómputo del bloque B de la UDEC
AGRUPACIÓN	RECURSOS	
Individual	Computadores con acceso a internet y GeoGebra instalada en el ordenador	
OBJETIVOS		
<ul style="list-style-type: none"> <li>-Identificar las características propias del grupo cristalográfico <math>p1</math></li> <li>-Diseñar un mosaico del grupo cristalográfico <math>p1</math> siguiendo el material que se encuentra en el REA: una hoja dinámica en la que podrá interactuar, manipular y seguir mediante el instructivo también adjunto.</li> </ul>		
ACTIVIDADES		

-Durante la primera media hora se orienta la forma de trabajo, se debe tener abierto de forma simultánea: el archivo en línea del grupos cristalográfico p1 que se encuentran en el REA, el instructivo que también se encuentra en el recurso y la aplicación.

-Una a una se van leyendo las instrucciones, se van siguiendo en el documento en línea y se replican en la aplicación, dando libertad en algunas específicas.

-El estudiante debe diseñar un mosaico que corresponda al grupo cristalográfico p1, y colgarlo en la aplicación

## EVIDENCIAS

Trabajos realizados en la sesión II diseñados por algunos de los estudiantes.



**Ilustración 16 Construcción del grupo p1**

**Sesión III: Construcción del grupo p4**

Tabla 6 Descripción de la sesión III, 2017 II semestre

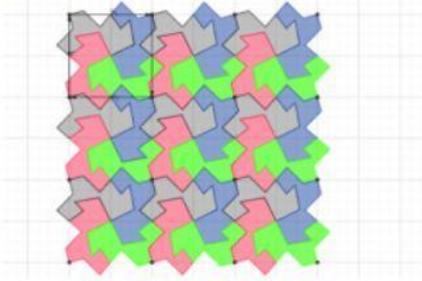
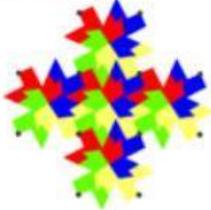
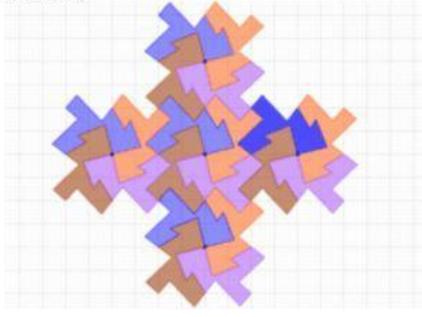
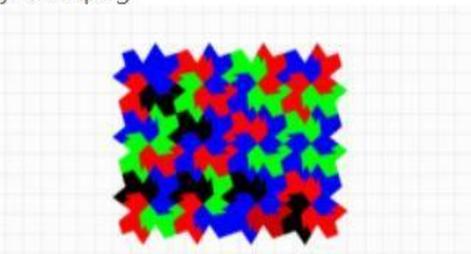
LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRAFICOS ESTUDIADOS CON GEOGEBRA. ANÁLISIS EN EL ARTE DE CULTURAS ANCESTRALES Y CONTEMPORÁNEAS		
SESIÓN	DURACIÓN	LUGAR
III	120 minutos (60 con acompañamiento y 60 trabajo individual)	Sala de cómputo del bloque B de la UDEC
AGRUPACIÓN	RECURSOS	
Individual	Computadores con acceso a Internet y GeoGebra instalada en el ordenador	
OBJETIVOS		
<p>-Identificar las características geométricas e isométricas propias del grupo cristalográfico p4.</p> <p>-Diseñar un mosaico del grupo cristalográfico p4 siguiendo el material que se encuentra en el REA: una hoja dinámica en la que podrá interactuar, manipular y seguir mediante el instructivo también adjunto.</p>		
ACTIVIDADES		
<p>-Se realizan algunas observaciones acerca del uso correcto del recurso y del Software, para identificar claramente las transformaciones geométricas de cada grupo.</p> <p>-Se orienta la forma de trabajo que aunque es similar al grupo anterior se hará énfasis en el uso adecuado de las casillas de control y de los deslizadores con el fin visualizar las transformaciones que sufre cada polígono.</p>		

-Una a una se van leyendo las instrucciones, se van siguiendo en el documento en línea y se replican en la aplicación, dando libertad en algunas específicas.

-El estudiante debe diseñar un mosaico que corresponda al grupo cristalográfico p4, y colgarlo en la aplicación

## EVIDENCIAS

Trabajos realizados en la sesión III diseñados por algunos de los estudiantes.

<p><b>C</b> Cristian Stiven Gomez 18 de octubre de 2017 18:10 p4.png</p> 	<p><b>F</b> felipe 18 de octubre de 2017 18:10 geogebra-export.png</p> 
<p><b>R</b> Julian rios 18 de octubre de 2017 18:20 12.png</p> 	<p><b>Y</b> YOMER BESLEY NIETO 18 de octubre de 2017 18:30 yomer.png</p> 

**Ilustración 17 Construcción del grupo p4**

**Sesión IV:** Construcción de los demás grupos cristalográficos.

**Tabla 7 Descripción de la sesión IV, 2017 II semestre**

**LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRAFICOS ESTUDIADOS CON GEOGEBRA.  
ANÁLISIS EN EL ARTE DE CULTURAS ANCESTRALES Y CONTEMPORÁNEAS**

SESIÓN	DURACIÓN	LUGAR
IV	120 minutos (60 con acompañamiento y 60 trabajo individual)	Sala de cómputo del bloque B de la UDEC
AGRUPACIÓN	RECURSOS	
Individual	Computadores con acceso a internet y GeoGebra instalada en el ordenador	
OBJETIVOS		
<p>-Identificar las características geométricas e isométricas propias cada grupo cristalográfico.</p> <p>-Diseñar un mosaico de cada grupo cristalográfico enlazados en el recurso siguiendo el material que se encuentra en el REA: una hoja dinámica en la que podrá interactuar, manipular y seguir mediante el instructivo también adjunto.</p> <p>-Relacionar los grupos cristalográficos con expresiones artísticas de su propia autoría.</p>		
ACTIVIDADES		
<p>-Se realizan algunas observaciones en torno los tipos de transformaciones geométricas que se pueden encontrar en los grupos cristalográficos y, se profundiza en la simetría central para que no sea confundida con la simetría axial o con las traslaciones.</p> <p>-Cada estudiante diseña un mosaico de cada grupo cristalográfico apoyado en el material que se encuentra en el recurso y, lo sube en el lugar indicado.</p> <p>-Se asigna a cada estudiante un grupo cristalográfico para que diseñe un mosaico, se da libertad total en cuanto al diseño siempre que cumpla con las características del grupo.</p>		

## EVIDENCIAS

Trabajos realizados en la sesión IV diseñados por algunos de los estudiantes.



**Ilustración 18 Construcción de los demás grupos cristalográficos**

**Sesión V y VI:** Construcción de una obra artística de Escher.

**Tabla 8 Descripción de la sesión V y VI, 2017 II semestre**

LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRAFICOS ESTUDIADOS CON GEOGEBRA. ANÁLISIS EN EL ARTE DE CULTURAS ANCESTRALES Y CONTEMPORÁNEAS		
SESIÓN	DURACIÓN	LUGAR
V – VI	240 minutos (120 con acompañamiento y 120 trabajo individual)	Sala de cómputo del bloque B de la UDEC
AGRUPACIÓN	RECURSOS	
Individual	Computadores con acceso a internet y GeoGebra instalada en el	

	ordenador
<b>OBJETIVOS</b>	
<p>-Relacionar los grupos cristalográficas con expresiones artísticas.</p> <p>-Reproducir una obra de Escher y de acuerdo a sus características asociarle un grupo cristalográfico.</p>	
<b>ACTIVIDADES</b>	
<p>-Se asigna a cada estudiante una obra del artista Escher para que lo analice, lo reproduzca y en el proceso reconozca el grupo cristalográfico asociado a la obra.</p>	
<b>EVIDENCIAS</b>	
<p>Trabajos realizados en la sesión V y VI diseñados por algunos de los estudiantes.</p>	
	



ILUSTRACIÓN 19 ESTUDIANTES DE LA LÍNEA DE PENSAMIENTO GEOMÉTRICO TRABAJANDO EN LA SALA



Ilustración 20 Construcción de una obra artística de Escher

### Primer semestre 2018

El desarrollo del proyecto se llevó al término de seis sesiones que se describen a continuación:

**Sesión I:** Adaptación al software.

**Tabla 9** Descripción de la sesión I, 2018 I semestre

LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRAFICOS ESTUDIADOS CON GEOGEBRA. ANÁLISIS  
EN EL ARTE DE CULTURAS ANCESTRALES Y CONTEMPORÁNEAS

SESIÓN	DURACIÓN	LUGAR
I	120 minutos (60 con acompañamiento y 60 trabajo individual)	Laboratorio de matemáticas
AGRUPACIÓN	RECURSOS	
Individual	Computadores con acceso a internet y GeoGebra instalada en el ordenador	
OBJETIVOS		
<p>Dar a conocer el software a trabajar.</p> <p>Implementar algunos de los comandos del software en algunos ejercicios de aplicación.</p> <p>Adaptar al estudiante con el software, su interfaz y su manipulación en la vista geométrica.</p>		
ACTIVIDADES		
<p>-Se inicia la sesión dando a conocer el proyecto, la intencionalidad y las herramientas de trabajo, que en este caso es el software libre GeoGebra.</p> <p>-Los estudiantes deben crear una cuenta gratuita en GeoGebra, y acceder al grupo por medio del enlace y el código.</p> <p>-Una vez en se encuentren al interior del recurso encontrarán un archivo titulado “Grupo p4” de por medio del cual conocerán el método de trabajo, siguiendo el paso a paso de la guía.</p>		
EVIDENCIAS		
Evidencia del ingreso de los estudiantes al grupo en GeoGebra		

GeoGebra

Jhoan Sebastian Ruiz

← 17 GRUPOS CRISTALOGRAFICOS EN ..

Publicaciones Miembros Recursos Evaluación

Escribe **FAGPD** en [www.geogebra.org/groups](http://www.geogebra.org/groups) para unirse al grupo.

+ Añadir miembros al grupo Invitar

Hay 9 miembros en este grupo.

Nombre	Fecha de ingreso	Rol
Jhoan Sebastian Ruiz	21 de febrero de 2018	Propietario *
adriana lopez	21 de febrero de 2018	Miembro
Felipe Diaz	21 de febrero de 2018	Miembro
jonathan david	21 de febrero de 2018	Miembro
Jose Aguirre Gonzalez	21 de febrero de 2018	Miembro
Liliana Burgos	6 de marzo de 2018	Miembro
Luis Miguel diaz failach	26 de marzo de 2018	Miembro
luz adriana	21 de febrero de 2018	Miembro
miguelangelo738	21 de febrero de 2018	Miembro

**Ilustración 21 Registro de estudiantes en el REA**

## Sesión II: Construcción de los grupos p1 y p2

Tabla 10 Descripción de la sesión II, 2018 I semestre

LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRAFÍCOS ESTUDIADOS CON GEOGEBRA. ANÁLISIS EN EL ARTE DE CULTURAS ANCESTRALES Y CONTEMPORÁNEAS		
SESIÓN	DURACIÓN	LUGAR
II	120 minutos (60 con acompañamiento y 60 trabajo individual)	Laboratorio de matemáticas
AGRUPACIÓN	RECURSOS	
Individual	Computadores con acceso a internet y GeoGebra instalada en el ordenador	

## OBJETIVOS

- Identificar las características propias de los grupos cristalográficos p1 y p2
- Diseñar un mosaico de los grupos cristalográficos p1 y p2, siguiendo el material que se encuentra en el REA: una hoja dinámica en la que podrá interactuar, manipular y seguir mediante el instructivo también adjunto.

## ACTIVIDADES

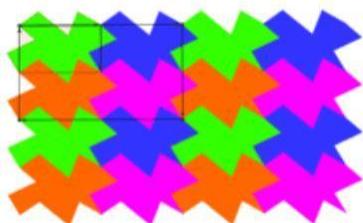
- Durante la primera media hora se orienta la forma de trabajo, se debe tener abierto de forma simultánea: el archivo en línea del grupo cristalográfico p1 que se encuentran en el REA, el instructivo que también se encuentra en el recurso y la aplicación.
- Una a una se van leyendo las instrucciones, se van siguiendo en el documento en línea y se replican en la aplicación, dando libertad en algunas específicas.
- El estudiante debe diseñar un mosaico que corresponda a los grupos cristalográficos p1 y p2, y colgarlo en la aplicación.

## EVIDENCIAS

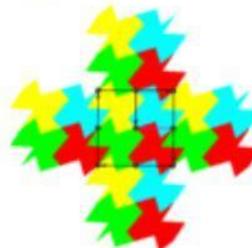
Trabajos realizados en la sesión II diseñados por algunos de los estudiantes.



[Liliana Burgos](#) 7 de marzo de 2018 7:29  
grupo 1.png



[jonathan david](#) 14 de marzo  
jonathan.png





**Sesión III:** Construcción de los grupos p3 y p4

**Tabla 11 Descripción de la sesión III, 2018 I semestre**

LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRAFICOS ESTUDIADOS CON GEOGEBRA. ANÁLISIS EN EL ARTE DE CULTURAS ANCESTRALES Y CONTEMPORÁNEAS		
SESIÓN	DURACIÓN	LUGAR
III	120 minutos (60 con acompañamiento y 60 trabajo individual)	Laboratorio de matemáticas
AGRUPACIÓN	RECURSOS	
Individual	Computadores con acceso a internet y GeoGebra instalada en el ordenador	
OBJETIVOS		
<ul style="list-style-type: none"> <li>-Identificar las características propias de los grupos cristalográficos p3 y p4</li> <li>-Diseñar un mosaico de los grupos cristalográficos p3 y p4, siguiendo el material que se encuentra en el REA: una hoja dinámica en la que podrá interactuar, manipular y seguir mediante el instructivo también adjunto.</li> </ul>		
ACTIVIDADES		

-Se dan algunas observaciones acerca de las construcciones de los grupos p1 y p2 presentados a la fecha.

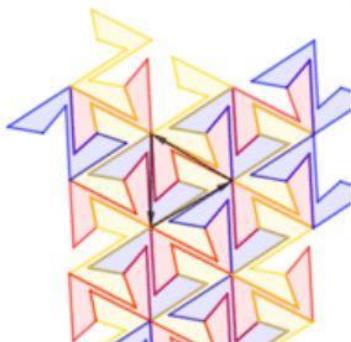
-El estudiante sigue el instructivo para generar el análisis de los grupos cristalográficos p3 y p4.

-El estudiante debe diseñar un mosaico que corresponda a los grupos cristalográficos p3 y p4, y colgarlo en la aplicación.

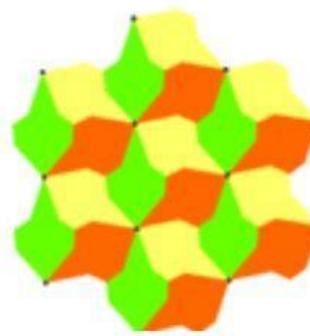
## EVIDENCIAS

Trabajos realizados en la sesión III diseñados por algunos de los estudiantes.

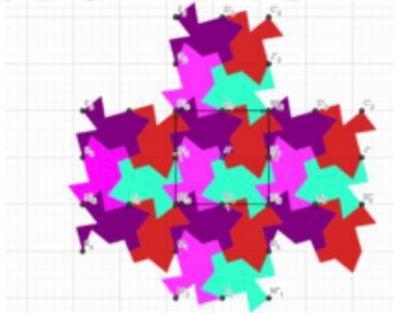
**J** [jonathan david](#) 7 de marzo de 2018  
jonathan p3.PNG



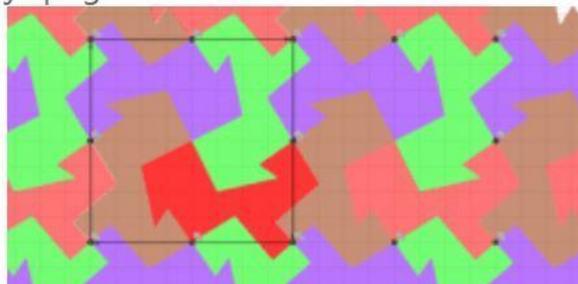
**L** [Liliana Burgos](#) 7 de marzo de 2018  
p3.png



**A** [adrianalopez](#) 19 de marzo de 2018  
p4geogebra-export.png



**J** [Jose Aguirre Gonzalez](#) 14 de marzo de 2018  
jo.png



**Ilustración 23** Construcción de los grupos cristalográficos p3 y p4

**Sesión IV:** Análisis de los 17 grupos cristalográficos

Tabla 12 Descripción de la sesión IV, 2018 I semestre

LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRAFICOS ESTUDIADOS CON GEOGEBRA. ANÁLISIS EN EL ARTE DE CULTURAS ANCESTRALES Y CONTEMPORÁNEAS		
SESIÓN	DURACIÓN	LUGAR
IV	120 minutos (60 con acompañamiento y 60 trabajo individual)	Laboratorio de matemáticas
AGRUPACIÓN	RECURSOS	
Individual	Computadores con acceso a internet y GeoGebra instalada en el ordenador	
OBJETIVOS		
-Identificar las características propias y las transformaciones geométricas de cada grupo cristalográfico.		
ACTIVIDADES		
-Se analiza el grupo p1 por medio de las tres tablas adjuntas y, los estudiantes deben completar la tabla realizando el correcto análisis de cada grupo cristalográfico.		
EVIDENCIAS		
Ver anexo II y III		

**Sesión V:** Asociación de los 17 grupos cristalográficos con los diseños decorativos de la

Alhambra

Tabla 13 Descripción de la sesión V, 2018 I semestre

LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRAFICOS ESTUDIADOS CON GEOGEBRA. ANÁLISIS EN EL ARTE DE CULTURAS ANCESTRALES Y CONTEMPORÁNEAS		
SESIÓN	DURACIÓN	LUGAR
V	120 minutos (60 con acompañamiento y 60 trabajo individual)	Laboratorio de matemáticas
AGRUPACIÓN	RECURSOS	
Individual	Computadores con acceso a internet y GeoGebra instalada en el ordenador	
OBJETIVOS		
<p>-Asociar los grupos cristalográficos con diseños artísticos encontrados en el palacio de La Alhambra.</p> <p>-Duplicar los diseños de la Alhambra mediante el software GeoGebra.</p> <p>-Analizar las transformaciones geométricas de cada diseño.</p>		
ACTIVIDADES		
<p>-Se realiza una presentación con el fin de asociar el diseño de La Alhambra con el paso a paso para generar el análisis geométrico y su asociación con los grupos cristalográficos.</p> <p>-Cada estudiante debe duplicar y generar el análisis de dos diseños de la Alhambra que le fueron asignados por medio del grupo establecido en GeoGebra.</p>		
EVIDENCIAS		

Registro fotográfico de la sesión y trabajos realizados por los estudiantes:



**Ilustración 24** Estudiantes de pensamiento geométrico construyendo los diseños de la Alhambra en GeoGebra

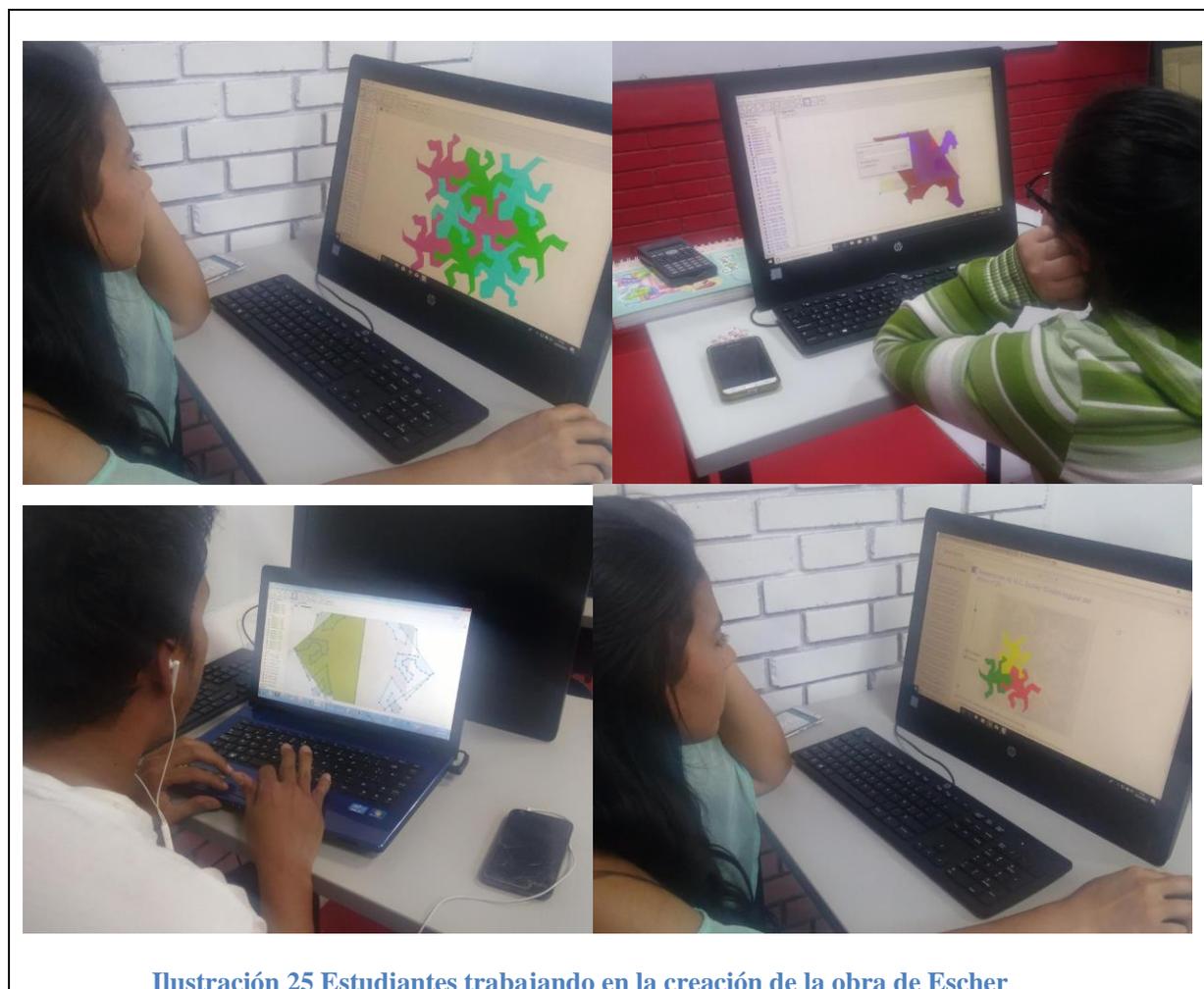
**Sesión VI:** Asociación de los 17 grupos cristalográficos con la obra de Escher

**Tabla 14** Descripción de la sesión VI, 2018 I semestre

**LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS ESTUDIADOS CON GEOGEBRA.  
ANÁLISIS EN EL ARTE DE CULTURAS ANCESTRALES Y CONTEMPORÁNEAS**

SESIÓN	DURACIÓN	LUGAR
VI	120 minutos (60 con acompañamiento y 60 trabajo individual)	Laboratorio de matemáticas

<b>AGRUPACIÓN</b>	<b>RECURSOS</b>
Individual	Computadores con acceso a internet y GeoGebra instalada en el ordenador
<b>OBJETIVOS</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>-Asociar los grupos cristalográficos con diseños artísticos encontrados las obras de Escher.</li> <li>-Duplicar los diseños de Escher mediante el software GeoGebra.</li> <li>-Analizar las transformaciones geométricas de cada diseño.</li> </ul>	
<b>ACTIVIDADES</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>-Se realiza una presentación con el fin de asociar el diseño de La Alhambra con el paso a paso para generar el análisis geométrico y su asociación con los grupos cristalográficos.</li> <li>-Cada estudiante debe duplicar y generar el análisis de un diseño de la obra de Escher, que le fue asignados por medio del grupo establecido en GeoGebra.</li> </ul>	
<b>EVIDENCIAS</b>	
Trabajos realizados en la sesión VI diseñados por algunos de los estudiantes.	



**Ilustración 25** Estudiantes trabajando en la creación de la obra de Escher

**Sesión VII:** Exposición de trabajos finales

**Tabla 15** Descripción de la sesión VII, 2018 I semestre

<b>LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS ESTUDIADOS CON GEOGEBRA. ANÁLISIS EN EL ARTE DE CULTURAS ANCESTRALES Y CONTEMPORÁNEAS</b>		
SESIÓN	DURACIÓN	LUGAR
VII	60 minutos	Laboratorio de matemáticas
AGRUPACIÓN	RECURSOS	
Individual	Computadores con acceso a internet y GeoGebra instalada en el	

	ordenador
<b>OBJETIVOS</b>	
-Identificar la comprensión en la aplicabilidad artística de los 17 grupos cristalográficos.	
<b>ACTIVIDADES</b>	
--Exponer los trabajos realizados, con su respectivo análisis geométrico y la asociación al grupo cristalográfico correspondiente.	
<b>EVIDENCIAS</b>	
Registro fotográfico de la sesión.	
 The image consists of four photographs arranged in a 2x2 grid. Each photo shows a student at a computer workstation in a classroom. The top-left photo shows a male student in a black and red jacket looking at a monitor displaying a colorful geometric pattern. The top-right photo shows a male student in a red jacket pointing at a monitor with a similar pattern. The bottom-left photo shows a female student with glasses and a red patterned shirt looking at a monitor. The bottom-right photo shows a female student in a grey hoodie making a peace sign while looking at a monitor. All monitors display complex, colorful geometric patterns characteristic of Escher's designs.	
<b>Ilustración 26 Estudiantes presentando su obra de escher diseñada con GeoGebra</b>	

### 13.1.5 Evaluación

Como metodología evaluativa, se considera el proceso de cada estudiante en la asimilación de los 17 grupos cristalográficos, el cumplimiento de cada una de las actividades y la sustentación de los productos realizados tanto de los grupos cristalográficos como, en los diseños decorativos de la Alhambra y en las obras recreadas de Escher.

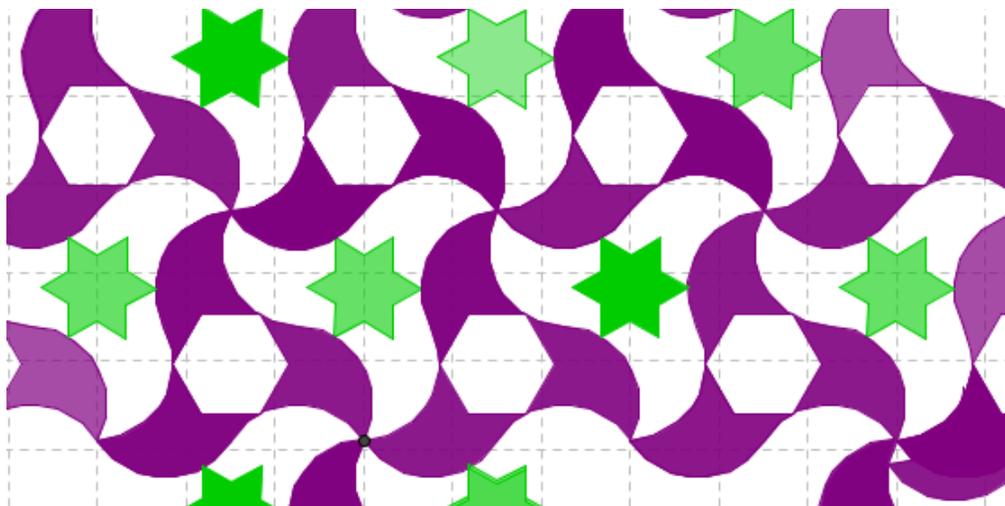


Ilustración 27 Diseño de la Alhambra realizado por Adriana López

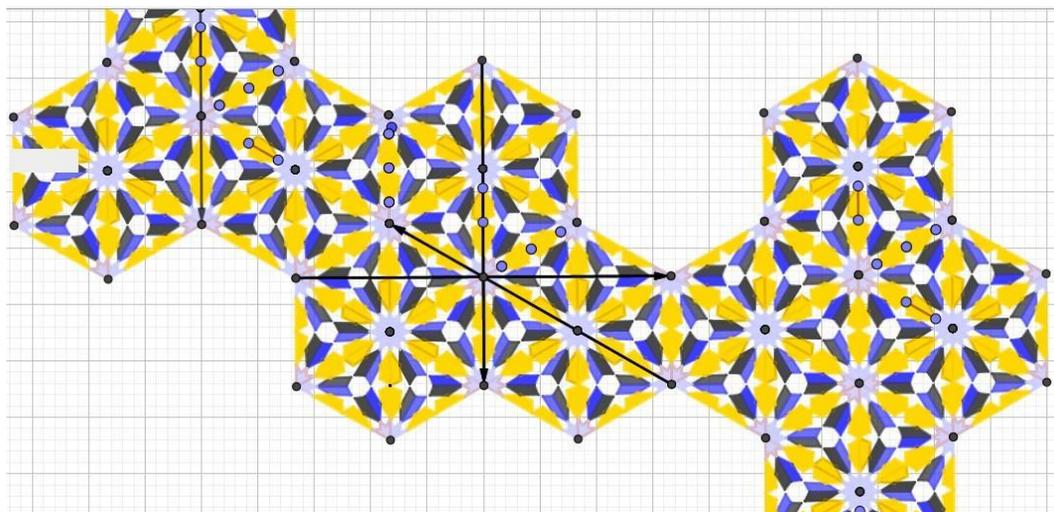
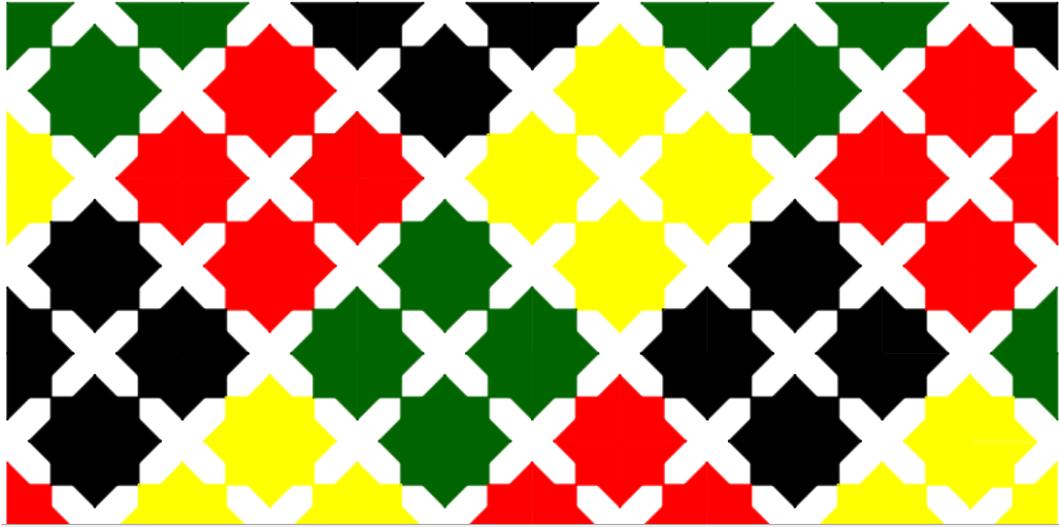
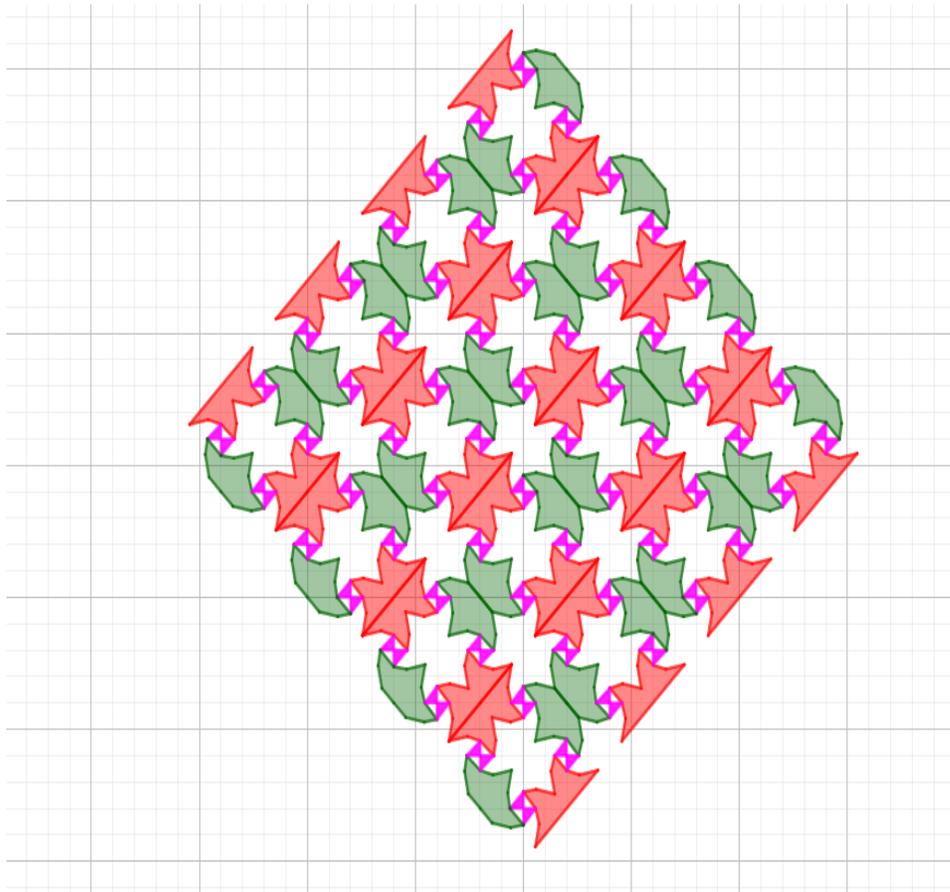


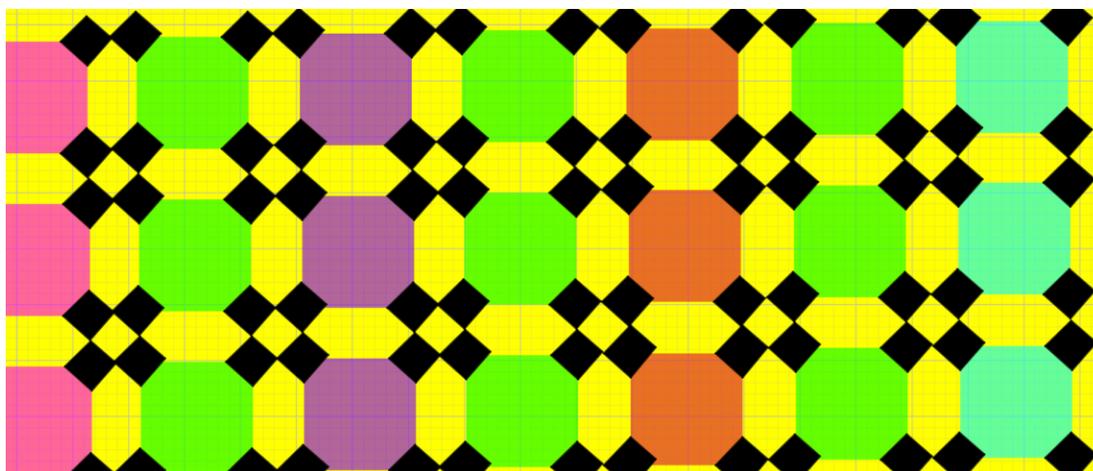
Ilustración 28 Diseño de la Alhambra realizado por Ángel Mayorga



**Ilustración 29** Diseño de la Alhambra realizado por Adriana Rivera



**Ilustración 30** Diseño de la Alhambra realizado por Jonathan David



**Ilustración 31** Diseño de la Alhambra realizado por Luis Miguel

Además se generó una rúbrica para valorar el REA como tal, y su influencia en el desarrollo de las actividades propuestas, a continuación se presenta el formato de la rúbrica diseñada para la evaluación del curso.

**Tabla 16** Formato de la rúbrica de evaluación, II semestre 2017

Formato rubrica de evaluación 2017					
Aspectos evaluados	Niveles de desempeño				Puntaje
	Superior	Alto	Básico	Bajo	
Realizar de forma completa las actividades propuestas para la iniciación en el manejo de los comandos de GeoGebra, y subir	<b>Hasta 50 puntos</b>	<b>Hasta 40 puntos</b>	<b>Hasta 30 puntos</b>	<b>0 puntos</b>	<b>50</b>
	El estudiante realiza todas las construcciones propuestas, utilizando de	El estudiante no realiza todas las construcciones propuestas, utilizando de	El estudiante realiza las construcciones propuestas de forma incompleta,	El estudiante no realiza las construcciones propuestas, utilizando de	

las imágenes de las mismas al recurso	forma adecuada los comandos de GeoGebra y las sube al recurso.	los comandos de GeoGebra o no las sube al recurso.	utilizando los comandos de GeoGebra.	adecuada los comandos de GeoGebra ni las sube al recurso.	
Construir un modelo para cada grupo cristalográfico, apoyándose en el REA, e identificando de forma visual las transformaciones geométricas presentes en cada uno.	<b>Hasta 150 puntos</b>	<b>Hasta 120 puntos</b>	<b>Hasta 80 puntos</b>	<b>0 puntos</b>	<b>150</b>
	El estudiante construye todos los grupos cristalográficos e identifica las transformaciones geométricas presentes en cada uno.	El estudiante no construye todos los grupos cristalográficos e identifica las transformaciones geométricas presentes en cada uno.	El estudiante no construye todos los grupos cristalográficos y poco identifica las transformaciones geométricas presentes en cada uno.	El estudiante no construye los grupos cristalográficos ni identifica las transformaciones geométricas presentes en cada uno.	
Construir el teselado asignado de la obra de	<b>Hasta 150 puntos</b>	<b>Hasta 120 puntos</b>	<b>Hasta 80 puntos</b>	<b>0 puntos</b>	<b>150</b>
	El estudiante	El estudiante	El estudiante	El estudiante	

<p>Escher, analizando las transformaciones geométricas presentes en el mismo.</p>	<p>construye de forma acertada el teselado asignado, usando el software libre GeoGebra y analizando las transformaciones geométricas presentes.</p>	<p>construye el teselado asignado usando el software libre GeoGebra y con dificultad analiza las transformaciones geométricas presentes.</p>	<p>construye con poca precisión el teselado asignado, usando el software libre GeoGebra y realiza un análisis escaso de las transformaciones geométricas presentes.</p>	<p>no construye el teselado asignado.</p>	
<p>Exponer la obra creada, explicando las transformaciones geométricas tenidas en cuenta para su elaboración y de acuerdo a esto</p>	<p><b>Hasta 150 puntos</b> El estudiante expone de forma clara la obra creada y presenta las transformaciones</p>	<p><b>Hasta 120 puntos</b> El estudiante expone la obra creada y presenta con duda las transformaciones</p>	<p><b>Hasta 80 puntos</b> El estudiante expone la obra creada y presenta con dificultad las transformaciones</p>	<p><b>0 puntos</b> El estudiante no expone la obra creada.</p>	<p><b>150</b></p>

asociándola a un grupo cristalográfico.	nes geométricas asociando el diseño a un grupo cristalográfico o.	es geométricas asociando el diseño a un grupo cristalográfico.	nes geométricas pero no lo asocia a un grupo cristalográfico o.		
Calificación final					<b>500</b>

**Tabla 17 Formato de la rúbrica de evaluación, I semestre 2018**

Formato rubrica de evaluación 2018					
Aspectos evaluados	Niveles de desempeño				Puntaje
	Superior	Alto	Básico	Bajo	
Realizar de forma completa los primeros cuatro grupos cristalográficos y anexa la imagen en el REA	<b>Hasta 50 puntos</b> El estudiante construye los 4 grupos cristalográficos e identifica las transformaciones	<b>Hasta 40 puntos</b> El estudiante no construye todos los grupos cristalográficos pero si identifica las transformacion	<b>Hasta 30 puntos</b> El estudiante no construye todos los grupos cristalográficos y se le dificulta identificar las	<b>0 puntos</b> El estudiante no construye los grupos cristalográficos ni identifica las transformaciones	<b>50</b>

	geométricas presentes en cada uno.	es geométricas presentes en cada uno.	transformaciones geométricas presentes en cada uno.	geométricas presentes en cada uno.	
Analizar los 17 grupos cristalográficos atendiendo a las transformaciones geométricas presentes tanto en la Tesela como en la prototesela, con el apoyo del material encontrado en el REA	<b>Hasta 150 puntos</b>	<b>Hasta 120 puntos</b>	<b>Hasta 80 puntos</b>	<b>0 puntos</b>	
	El estudiante analiza todos los grupos cristalográficos e identifica las transformaciones geométricas presentes en la tesela y la prototesela.	El estudiante no analiza todos los grupos cristalográficos pero si identifica las transformaciones geométricas presentes en la tesela y la prototesela.	El estudiante no analiza todos los grupos cristalográficos y se le dificulta identificar las transformaciones geométricas presentes en la tesela y la prototesela.	El estudiante no construye los grupos cristalográficos ni identifica las transformaciones geométricas presentes en cada uno.	<b>150</b>
Duplicar un diseño decorativo	<b>Hasta 150 puntos</b>	<b>Hasta 120 puntos</b>	<b>Hasta 80 puntos</b>	<b>0 puntos</b>	<b>150</b>

<p>encontrado en el Palacio de la Alhambra y asociarlo a un grupo cristalográfico de acuerdo a las transformaciones geométricas encontradas.</p>	<p>El estudiante construye de forma acertada los diseños decorativos de la Alhambra, usando el software libre GeoGebra, analizando las transformaciones geométricas presentes y asociándolos a un grupo cristalográfico.</p>	<p>El estudiante construye los diseños decorativos de la Alhambra, usando el software libre GeoGebra, con dificultad analiza las transformaciones geométricas presentes y los asocia a un grupo cristalográfico.</p>	<p>El estudiante construye con poca precisión los diseños decorativos de la Alhambra, usando el software libre GeoGebra, realiza un análisis escaso de las transformaciones geométricas presentes y no los asocia a un grupo cristalográfico.</p>	<p>El estudiante no construye los diseños decorativos de la Alhambra.</p>	
<p>Construir, usando</p>	<p><b>Hasta 150</b></p>	<p><b>Hasta 120</b></p>	<p><b>Hasta 80</b></p>	<p><b>0 puntos</b></p>	<p><b>150</b></p>

el software GeoGebra, el teselado asignado de la obra de Escher, analizando las transformaciones geométricas presentes en el mismo y de acuerdo a esto asociándolo a un grupo cristalográfico.	<b>puntos</b>	<b>puntos</b>	<b>puntos</b>		
	El estudiante construye de forma acertada el teselado asignado, usando el software libre GeoGebra y analizando las transformacio nes geométricas presentes.	El estudiante construye el teselado asignado usando el software libre GeoGebra y con dificultad analiza las transformacion es geométricas presentes.	El estudiante construye con poca precisión el teselado asignado, usando el software libre GeoGebra y realiza un análisis escaso de las transformacio nes geométricas presentes.	El estudiante no construye el teselado asignado.	
				<b>Calificación final</b>	<b>500</b>

Y finalmente se asigna un modelo de autoevaluación en el que cada estudiante plasma su propia concepción del curso, considerando el proceso realizado de forma personal, y anexando sugerencias y observaciones, a continuación la autoevaluación realizada por Miguel Ángel Mayorga Henao

***NOMBRE: Miguel Ángel Mayorga Henao***

---

Evalúe de 1 a 5 cada uno de los siguientes ítems donde 5 es la mejor calificación y 1 la valoración más baja.

**Tabla 18 Autoevaluación de Miguel Ángel Mayorga Henao**

<b><i>Instalaciones (aula y equipos informáticos)</i></b>	<b><i>1</i></b>	<b><i>2</i></b>	<b><i>3</i></b>	<b><i>4</i></b>	<b><i>5</i></b>
El espacio del aula te ha parecido adecuado.					<b>X</b>
El número de alumnos que habéis trabajado en el mismo ordenador ha sido adecuado.					<b>X</b>
Tu ordenador ha funcionado correctamente.					<b>X</b>
La visión de la pantalla del monitor ha sido adecuada.					<b>X</b>
¿Te has encontrado cómodo en la clase?					<b>X</b>

<b>Programas y actividades</b>	<b><i>1</i></b>	<b><i>2</i></b>	<b><i>3</i></b>	<b><i>4</i></b>	<b><i>5</i></b>
Las construcciones se veían bien.					<b>X</b>
Ha sido fácil usar las construcciones interactivas.					<b>X</b>
Has leído las explicaciones de los instructivos.					<b>X</b>
Has entendido los enunciados de las actividades.					<b>X</b>
Has entendido lo que había que hacer en cada actividad.					<b>X</b>

<b>Metodología y aprendizaje</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
¿Has realizado todas las actividades propuestas?					<b>X</b>
¿Has resuelto las dudas que te han surgido?					<b>X</b>
¿Te ha gustado usar el Recurso Educativo Abierto (REA) para el aprendizaje de los 17 grupos cristalográficos?					<b>X</b>
¿Has tenido que consultar a tu profesor o profesora?					<b>X</b>
¿Has visto ventajas al aprendizaje con ordenador?					<b>X</b> <b>SI</b>
¿Has visto inconvenientes al aprendizaje con ordenador?			<b>X</b> <b>NO</b>		
¿Has aprendido los conceptos que has trabajado, cómo las transformaciones geométricas (Traslaciones, rotaciones, reflexiones)?					<b>X</b> <b>SI</b>
¿Has generado un conocimiento de los 17 grupos cristalográficos aplicado en la cultura Nazarí?					<b>X</b> <b>SI</b>
¿Has ubicado los 17 grupos cristalográficos en las obras de Escher?					<b>X</b> <b>SI</b>
¿Consideras que puedes aplicar los 17 grupos cristalográficos en otros contextos?	<b>Si <u>X</u></b>	<b>No</b>	¿En dónde? <u>Arquitectura, moda,</u> <u>arte,etc</u>		
¿Crees que has aprendido con Geogebra					<b>X</b>

cosas que hubiesen sido más difíciles de aprender sin esa herramienta?					<b>SI</b>
¿Preferirías aprender matemáticas sin GeoGebra y sin ordenador?	<b>X</b>				
	<b>NO</b>				

OBSERVACIONES: fue una excelente experiencia, nos hace pensar otras formas de transmitir el conocimiento, de una manera diferente y más llamativa.

## CAPÍTULO IV

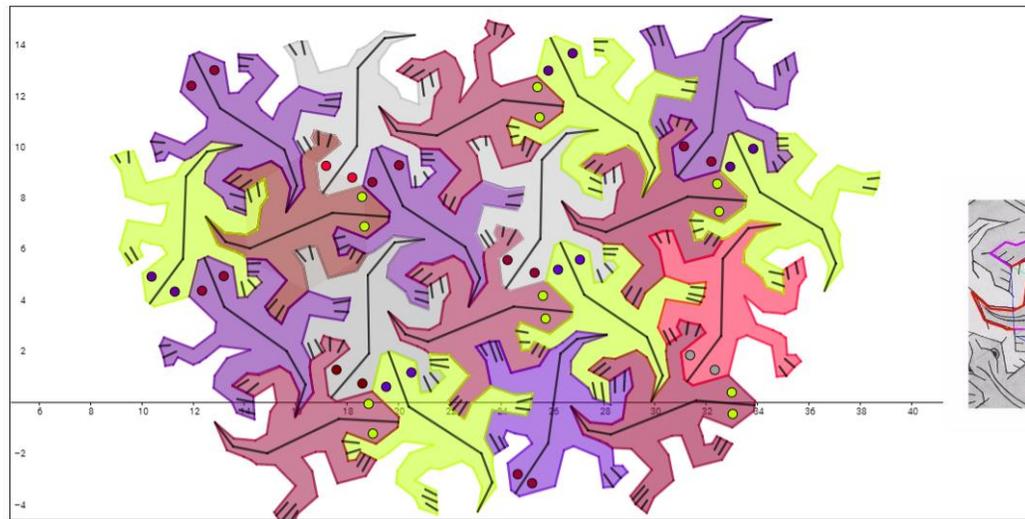
### 14. Resultados

Los resultados se obtuvieron, por medio del software libre GeoGebra, diseños tanto de los grupos cristalográficos, como de las decoraciones encontradas en la Alhambra y algunas de las obras de Escher; cada una en su caso con los respectivos análisis geométricos como se han señalado a lo largo del proyecto.

La asociación de los diseños artísticos con los grupos cristalográficos fue acertada, dada la implementación del REA, ya que además de facilitar lo mencionado agiliza la comprensión de las características que encierra cada uno, llevando a crear procesos de asociación mental bastantes fuertes.

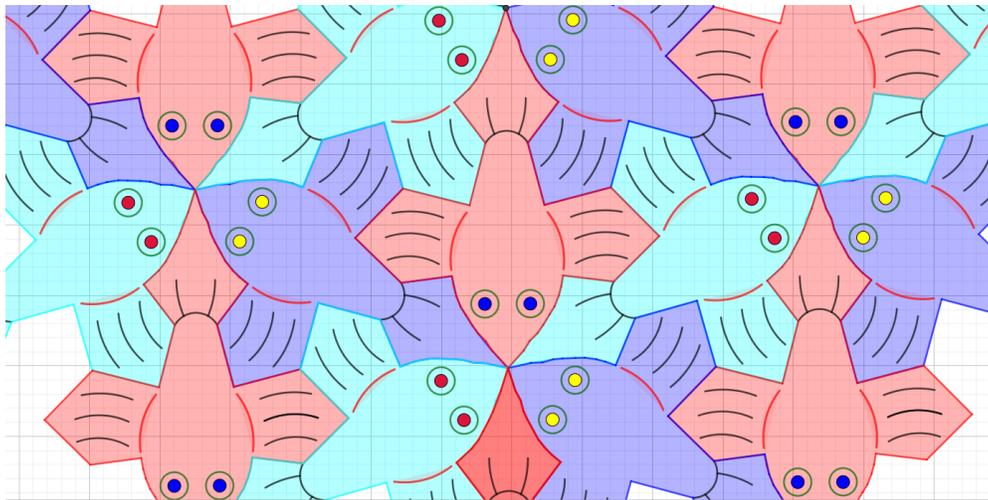


Ilustración 32 Obra de Escher recreada por Karen, 2017 II semestre

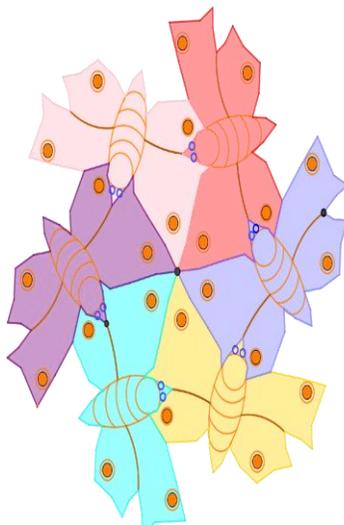


GeoCebra - Cristian Melo

**Ilustración 33** Obra de Escher recreada por Cristian Melo, 2017 II Semestre

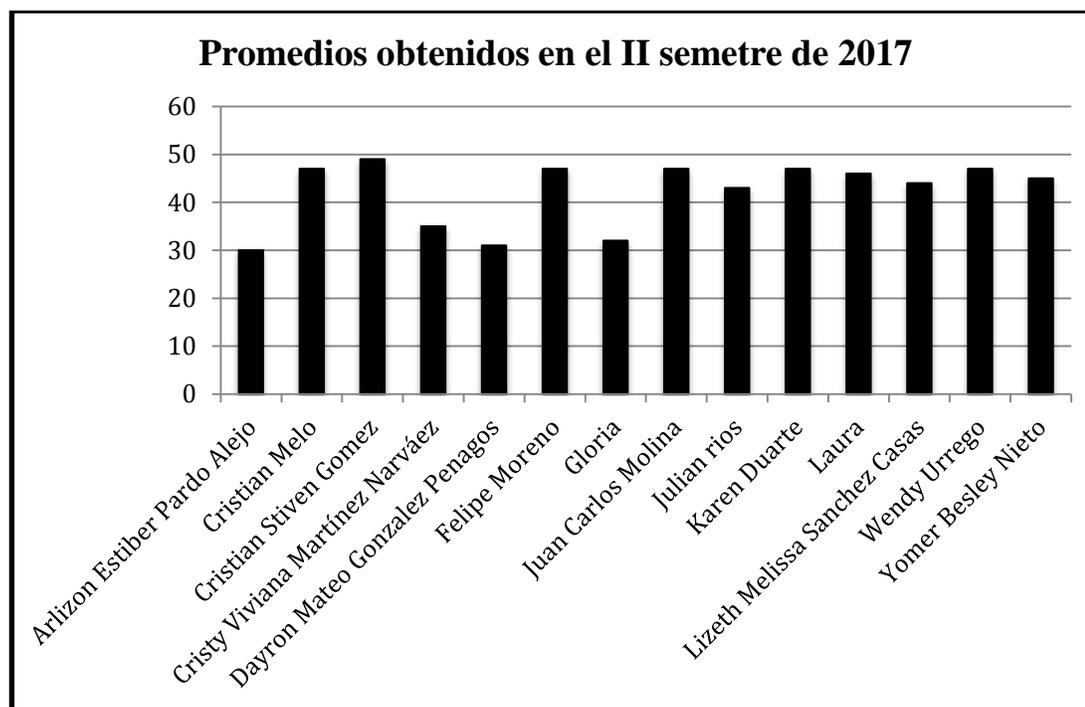


**Ilustración 34** Obra de Escher recreada por José Aguirre, 2018 i semestre

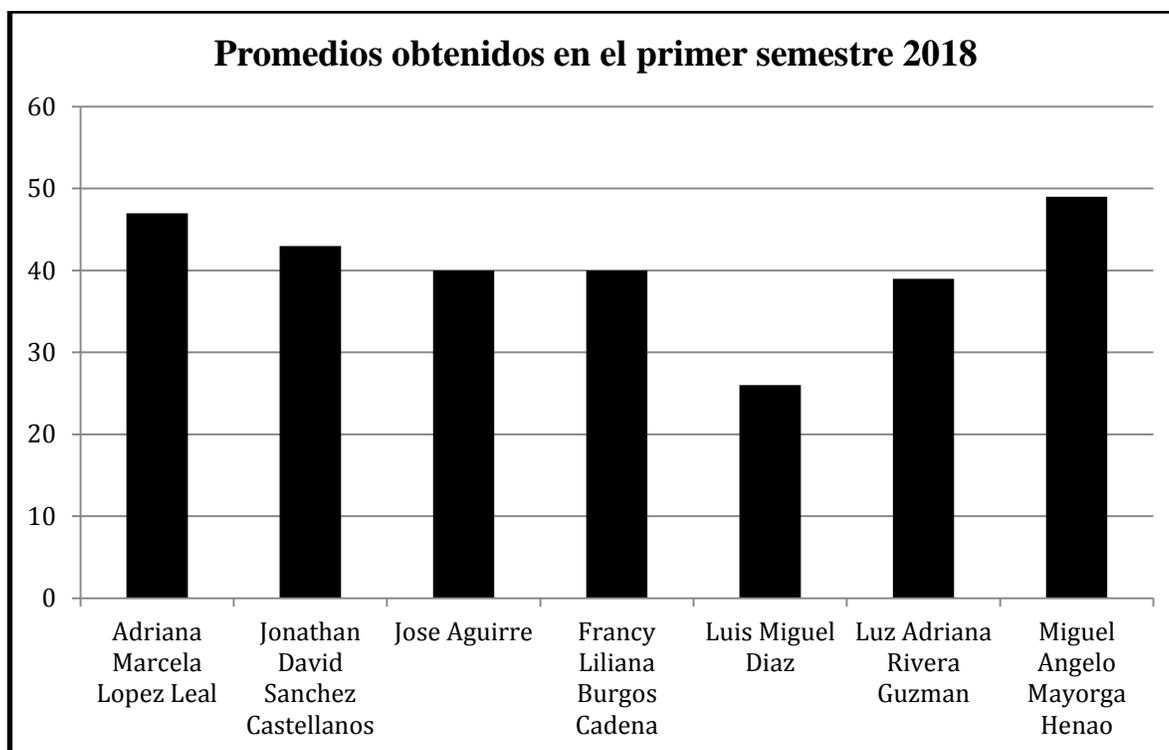


**Ilustración 35** Obra de Escher recreada por Luz Adriana, 2018 I Semestre

De acuerdo a la rúbrica establecida en el modelo de la evaluación los resultados se relacionan a continuación:



**Ilustración 36** Promedios obtenidos en el segundo semestre 2017



**Ilustración 37 Promedios obtenidos en el primer semestre 2018**

El impacto del proyecto generó gran acogida, y esto se denota no solo en los productos obtenidos, sino que también por los excelentes comentarios generados por quienes participaron del II Encuentro Pedagógico, realizado en las instalaciones de la Escuela Normal Superior de Pasca (Ver anexo I), en dónde se expuso la experiencia realizada para el diseño y la implementación del recurso.

### **15. Análisis de los resultados**

Gracias a las exposiciones de los trabajos realizados y a la rúbrica establecida se llega a establecer que la aplicabilidad del REA facilita diferentes procesos visuales que en un tablero convencional no se podrían observar tan fácilmente, al generar movimientos utilizando los deslizadores, los estudiantes comprenden visualmente cada una de las transformaciones geométricas aplicadas para la construcción de cada uno de los grupos cristalográficos. El software permite también ocultar elementos necesarios para las

construcciones pero que, más adelante no se utilizarán, limpiando con esto la carga visual de quien observa.

De los estudiantes participantes en la aplicación del REA el 71,4 % presentan un nivel alto o superior en cuanto a la visualización de los 17 grupos cristalográficos, la representación de estos mismos en obras de arte, y las transformaciones geométricas que cada grupo contiene, esto indica que la mayoría de los estudiantes comprendieron son capaces de discriminar diferentes tipos de isometrías en un mosaico, que puede ser de tipo variado: artístico, arquitectónico, decorativo... Respecto al otro 28,6% se encuentran estudiantes que debido a su escases de tiempo no pudieron participar de lleno en el proceso y por ende los resultados no son los esperados.

Con los trabajos expuestos y las estadísticas anteriores también se comprende que los estudiantes además de visualizar los 17 grupos cristalográficos entienden las transformaciones geométricas comprendidas en los mismos y su amplia aplicación no solo en el arte, sino que también lo asocian a otras situaciones reales como la arquitectura, el diseño gráfico, la moda, entre otros.

## **CAPÍTULO IV**

### **16. Conclusiones**

Se diseñó un Recurso Educativo Tecnológico Abierto (REA), por medio del software libre GeoGebra, que permite la visualización de los 17 grupos cristalográficos, y se aplicó en estudiantes de la línea de pensamiento geométrico, de la Universidad de matemáticas, con buenos resultados y apropiación de la temática.

La implementación del Recurso Educativo Tecnológico Abierto (REA), permitió la relación de los grupos cristalográficos con expresiones artísticas de la cultura Nazarí encontradas en la ciudad-palacio de la Alhambra y obras de Arte del siglo XIX

El desarrollo de un Recurso Educativo Tecnológico Abierto REA, para la visualización de los 17 grupos cristalográficos partir del uso de GeoGebra, dirigido a estudiantes de Pensamiento Geométrico de la Licenciatura en Matemáticas de la UDEC, contribuyó a mejorar procesos visuales y a identificar las transformaciones geométricas presentes en cada una de estos.

### **17. Recomendaciones**

Se sugiere que el proyecto se siga implementando, y llevar la aplicación de los 17 grupos cristalográficos en otros contextos como son la arquitectura, al arte de otras culturas y la moda.

Como un paso posterior se pueden estudiar los grupos de Leonardo y los grupos de frisos y, de igual forma llevarlos a muestras artísticas encontradas en las diferentes catedrales del mundo.

## LISTA DE REFERENCIAS

- Benítez, N. (2011). Transformaciones geométricas en el arte. Recuperado de:  
<https://es.slideshare.net/loscuentosdenora/transformaciones-geomtricas-en-el-arte>
- Alcaide, J. (2016). Enseñanza de la geometría utilizando las Tic y materiales manipulativos como recurso didáctico en 4° de primaria. Recuperado de:  
[http://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/4278/ALCAIDE\\_TARIFA%2C\\_JORDI.pdf?sequence=1](http://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/4278/ALCAIDE_TARIFA%2C_JORDI.pdf?sequence=1)
- Ortiz, M. A. (2013). Marta Argudo Ortiz Tutor : José Ramón Salim Martínez, 1–53.
- Iturbe, A., & Ariagno, C. (2007). Transformaciones Geométricas y Arte. Recuperado de:  
<http://unrn.edu.ar/blogs/disinte-matematica-1/files/2014/04/transformaciones-y-arte.pdf>
- Arte, G. Y., De, A., De, L. T., Simetría, L., Moratalla, A., Sanz, A., & Maic, G. (n.d.). Geometría Y Arte Aplicaciones De La Teoría De La Simetría. Recuperado de:  
<http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Chip%20geom%20A9trico/GEOMETR%C3%8DA%20Y%20ARTE.pdf>
- Pérez Gómez, R. (2004). Un matemático pasea por la Alhambra. Física En Acción, 31–47.
- Iturbe, A. M., Ruiz, M. E., Pistonesi, M. V., & Fanitini, S. G. (2013). Uso del Geogebra en la enseñanza de la geometría en carreras de Diseño Use of Geogebra in teaching geometry in Drawing curses Introducción, 93–101. Recuperado de:  
<https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/16268>
- Kleber, M. (2013). Matemática instructiva: PENSAMIENTO GEOMETRICO. Recuperado de: <http://elprofe525.blogspot.com.co/2013/04/pensamiento-geometrico.html>

Banco Interamericano de Desarrollo. (2015). Recursos educativos abiertos (REA).

Recuperado de: <http://www.iadb.org/es/indes/recursos-educativos-abiertos-rea,7016.html>

San Martín Mazzucconi, C., & Sempere Navarro, A. V. (2015). Las TICs en el ámbito

laboral. Francis Lefebvre. Francis Lefebvre. Recuperado de: <http://cbueg->

[mt.iii.com/iii/encore/record/C\\_\\_Rb6262412\\_\\_STICS](http://mt.iii.com/iii/encore/record/C__Rb6262412__STICS) ámbito

[laboral\\_\\_Orightresult\\_\\_X2?lang=cat&suite=def](http://laboral__Orightresult__X2?lang=cat&suite=def)

## ANEXOS

### Anexo I: Participación en II Seminario Pedagógico realizado en la Normal de Pasca



ILUSTRACIÓN 36 PARTICIPACIÓN CON EL PROYECTO EN II SEMINARIO PEDAGÓGICO REALIZADO EN PASCA



ILUSTRACIÓN 37 PARTICIPACIÓN CON EL PROYECTO EN II SEMINARIO PEDAGÓGICO REALIZADO EN PASCA



**ILUSTRACIÓN 38 PARTICIPACIÓN CON EL PROYECTO EN II SEMINARIO PEDAGÓGICO REALIZADO EN PASCA**

## Anexo II: Formato de análisis de los 17 grupos cristalográficos

### ANÁLISIS DE LOS 17 GRUPOS CRISTALOGRAFICOS CON AYUDA DE GEOGEBRA

Completa las siguientes Tablas de acuerdo a la información obtenida en GeoGebra

ANÁLISIS DE LA TESELA						
Grupo Cristalográfico	Forma de la base de la tesela (FBT)	Rotaciones		Traslaciones	Simetría axial	Simetría central
		SI	Orden			
P1	Rectángulo	No	—	Si	No	No
P2						
P3						
P4						
P6						
Pg						
Pgg						
Cm						
Pm						
Pmg						
Pmm						
Cmm						
P4g						
P4m						

P31m						
P3m1						
P6m						

ANÁLISIS DE LA PROTOTESELA						
Grupo Cristalográfico	Forma de la Prototesela (FP)	Rotaciones		Traslaciones	Simetría axial	Simetría central
		SI	Orden			
P1	Rectángulo	No	--	Si	No	No
P2						
P3						
P4						
P6						
Pg						
Pgg						
Cm						
Pm						
Pmg						
Pmm						
Cmm						
P4g						

P4m						
P31m						
P3m1						
P6m						

Grupo Cristalográfico	Relación entre FBT y FP
<b>P1</b>	La base de la Tesela es un cuarto del rectángulo que forma la prototesela.
<b>P2</b>	
<b>P3</b>	
<b>P4</b>	
<b>P6</b>	
<b>Pg</b>	
<b>Pgg</b>	
<b>Cm</b>	
<b>Pm</b>	
<b>Pmg</b>	
<b>Pmm</b>	
<b>Cmm</b>	
<b>P4g</b>	

<b>P4m</b>	
<b>P31m</b>	
<b>P3m1</b>	
<b>P6m</b>	

**Anexo III: Análisis de los 17 grupos cristalográficos realizada por Ángel Mayorga Henao**

**Análisis de la tesela**

Grupo cristalográfico	Forma de la base de la tesela (FBT)	Rotaciones		traslaciones	Simetría axial	Simetría central
		Si	orden			
P1	Rectángulo	No	----	Si	No	No
P2	Cuadrado	Si	180 GRADOS (2)	si	NO	SI
P3	TRIANGULO	SI	120 grados (3)	SI	NO	NO
P4	cuadrado	Si	90 grados (4)	no	si	si
P6	triangulo	Si	180 grados (2)	no	si	si
Pg	rectángulo	No	-----	si	si	no
Pgg	rectángulo	No	----	si	no	si
Cm	rectángulo	No	----	si	si	no
Pm	rectángulo	No	----	si	si	si
Pmg	rectángulo	Si	180 (2)	si	si	si
Pmm	rectángulo	Si	180 (2)	si	si	si
Cmm	rectángulo	No	----	si	si	no
P4m	triangulo	No	----	si	si	no
P31m	triangulo	Si	120 (3)	no	si	si
P3m1	triangulo	Si	120 (3)	no	si	si

### Análisis de la prototeselesela

Grupo cristalográfico	Forma de la base de la tesela (FP)	Rotaciones		traslaciones	Simetría axial	Simetría central
		Si	Orden			
P1	Rectángulo	No	-----	Si	No	No
P2	CUADRADO	NO	180	SI	SI	SI
P3	Triangulo	SI	120	SI	NO	NO
P4	cuadrado	Si	90	si	no	si
P6	triangulo	Si	180	no	no	si
Pg	rectángulo	No	----	si	si	No
Pgg	rectángulo	No	---	si	No	si
Cm	rectángulo	No	----	si	si	No
Pm	rectángulo	No	----	si	si	No
Pmg	rectángulo	No	----	si	si	no
Pmm	rectángulo	Si	180	si	si	No
Cmm	rectángulo	Si	120	no	no	si
P4m	Rombo	No		si	no	si
P31m	Triangulo	Si	120	no	no	si
P3m1	Hexágono	No	-----	si	si	no

Grupo cristalográfico	Relación entre FBT Y FP
P1	La base de la Tesela es un cuarto del rectángulo que forma la prototesela.
P2	La base de la Tesela es un cuarto del cuadrado que forma la prototesela.
P3	La base de la tesela es más un tercio del triángulo que forma la prototesela
P4	La base de la Tesela es un cuarto del cuadrado que forma la prototesela.
P6	La base de la tesela es más un tercio del triángulo que forma la prototesela
Pg	La base de la Tesela es un cuarto del rectángulo que forma la prototesela.
Pgg	La base de la Tesela es un cuarto del rectángulo que forma la prototesela.
Cm	La base de la Tesela es un cuarto del rectángulo que forma la prototesela.
Pm	La base de la Tesela es un cuarto del rectángulo que forma la prototesela.
Pmg	La base de la tesela es un octavo del rectángulo que forma la fp
Pmm	La base de la tesela es un octavo del rectángulo que forma la fp
Cmm	La base de la Tesela es un cuarto del rectángulo que forma la prototesela.
P4m	La base de la tesela es un cuarto del rombo que forma la fp
P31m	La base de la tesela es el 100 por ciento del triángulo que forma la fp
P3m1	La base de la tesela es un cuarto del hexágono que forma la prototesela