	MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAr113
	PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
	DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
		PAGINA:1 de 7

21

FECHA	6 de Agosto de 2019
--------------	---------------------

Señores
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
 BIBLIOTECA
 Ciudad


UNIDAD REGIONAL	Sede Fusagasugá
TIPO DE DOCUMENTO	Trabajo De Grado
FACULTAD	Educación
NIVEL ACADÉMICO DE FORMACIÓN O PROCESO	Pregrado
PROGRAMA ACADÉMICO	Licenciatura en Matemáticas

El Autor(Es):

APELLIDOS COMPLETOS	NOMBRES COMPLETOS	No. DOCUMENTO DE IDENTIFICACIÓN
Moreno Ibagué	Anyi Biviana	1072896364

Diagonal 18 No. 20-29 Fusagasugá – Cundinamarca
 Teléfono (091) 8281483 Línea Gratuita 018000976000
 www.ucundinamarca.edu.co E-mail: info@ucundinamarca.edu.co
 NIT: 890.680.062-2

*Documento controlado por el Sistema de Gestión de la Calidad
 Asegúrese que corresponde a la última versión consultando el Portal Institucional*

	MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAr113
	PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
	DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
		PAGINA:2 de 7

Director(Es) y/o Asesor(Es) del documento:

APELLIDOS COMPLETOS	NOMBRES COMPLETOS
Duitama Leal	Alejandro

TÍTULO DEL DOCUMENTO
Modelación del efecto Doppler Acústico en Medios Dispersivos

SUBTÍTULO (Aplica solo para Tesis, Artículos Científicos, Disertaciones, Objetos Virtuales de Aprendizaje)

TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Aplica para Tesis/Trabajo de Grado/Pasantía
Licenciada en Matemáticas

AÑO DE EDICION DEL DOCUMENTO	NÚMERO DE PÀGINAS
2019	114

DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS (Usar 6 descriptores o palabras claves)	
ESPAÑOL	INGLÉS
1.Efecto Doppler	Doppler Effect
2.Metodo de Diferencias Finitas	Finite difference method.
3.Modelacion	Modeling
4.PML	Perfectly Matched Layer
5.Frecuencia	Frequency
6.Dispersivo	Dispersive

Diagonal 18 No. 20-29 Fusagasugá – Cundinamarca
Teléfono (091) 8281483 Línea Gratuita 018000976000
www.ucundinamarca.edu.coE-mail: info@ucundinamarca.edu.co
NIT: 890.680.062-2

*Documento controlado por el Sistema de Gestión de la Calidad
Asegúrese que corresponde a la última versión consultando el Portal Institucional*



MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAR113
PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
	PAGINA:3 de 7

RESUMEN DEL CONTENIDO EN ESPAÑOL E INGLÉS

(Máximo 250 palabras – 1530 caracteres, aplica para resumen en español):

En el presente estudio se realizó el modelamiento numérico del efecto Doppler, analizando el cambio de la frecuencia percibida según el movimiento relativo entre fuente y observador. Se utiliza el Método de Diferencias Finitas para discretizar la ecuación de onda en dos dimensiones, en el modelamiento se acoplaron fronteras no reflectivas empleando el método Perfectly Matched Layer (PML) con el fin de evitar efectos de borde en la simulación, el código fue realizado en el lenguaje de programación C++.

Para la modelación en medios dispersivos, se emplea la ecuación de onda adicionando dos parámetros, un parámetro de atenuación por difusión y otro de viscosidad. Se analizó el efecto Doppler en estos medios, enfocándose principalmente en el cambio de la frecuencia percibido según cada simulación.

Como resultado se evidencio que el método numérico empleado para la solución de ecuación de onda permite modelar de manera efectiva el efecto Doppler, corroborando los postulados teóricos al respecto y verificando la fórmula analítica obtenida para dicho efecto. En un medio dispersivo, particularmente en el aire, se presenta una variación baja en la frecuencia, en comparación con un medio no dispersivo, sin embargo, al cambiar el parámetro de atenuación por difusión y la velocidad, se presenta un cambio en la amplitud de la onda según sea el caso. Cuando la fuente de sonido se aleja de un observador en reposo, el espectro de frecuencias manifiesta un corrimiento hacia bajas frecuencias a medida que aumenta la velocidad, en los demás casos cuando el observador está cerca de la fuente, existe un corrimiento hacia altas frecuencias respecto a la frecuencia característica. Finalmente, en un medio dispersivo se manifiesta una variación en la frecuencia, pero los casos del efecto Doppler mantienen un mismo comportamiento.



MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAr113
PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
	PAGINA:4 de 7

AUTORIZACION DE PUBLICACIÓN

Por medio del presente escrito autorizo (Autorizamos) a la Universidad de Cundinamarca para que, en desarrollo de la presente licencia de uso parcial, pueda ejercer sobre mí (nuestra) obra las atribuciones que se indican a continuación, teniendo en cuenta que, en cualquier caso, la finalidad perseguida será facilitar, difundir y promover el aprendizaje, la enseñanza y la investigación.

En consecuencia, las atribuciones de usos temporales y parciales que por virtud de la presente licencia se autoriza a la Universidad de Cundinamarca, a los usuarios de la Biblioteca de la Universidad; así como a los usuarios de las redes, bases de datos y demás sitios web con los que la Universidad tenga perfeccionado una alianza, son:

Marque con una "X":

AUTORIZO (AUTORIZAMOS)	SI	NO
1. La reproducción por cualquier formato conocido o por conocer.	x	
2. La comunicación pública por cualquier procedimiento o medio físico o electrónico, así como su puesta a disposición en Internet.		x
3. La inclusión en bases de datos y en sitios web sean éstos onerosos o gratuitos, existiendo con ellos previa alianza perfeccionada con la Universidad de Cundinamarca para efectos de satisfacer los fines previstos. En este evento, tales sitios y sus usuarios tendrán las mismas facultades que las aquí concedidas con las mismas limitaciones y condiciones.	x	
4. La inclusión en el Repositorio Institucional.	x	

De acuerdo con la naturaleza del uso concedido, la presente licencia parcial se otorga a título gratuito por el máximo tiempo legal colombiano, con el propósito de que en dicho lapso mi (nuestra) obra sea explotada en las condiciones aquí estipuladas y para los fines indicados, respetando siempre la titularidad de los derechos patrimoniales y morales correspondientes, de acuerdo con los usos honrados, de manera proporcional y justificada a la finalidad perseguida, sin ánimo de lucro ni de comercialización.

Para el caso de las Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, de manera complementaria, garantizo(garantizamos) en mi(nuestra) calidad de estudiante(s) y por ende autor(es) exclusivo(s), que la Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi(nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro



MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAR113
PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
	PAGINA: 5 de 7

(aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos de la Tesis o Trabajo de Grado es de mí (nuestra) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

Sin perjuicio de los usos y atribuciones otorgadas en virtud de este documento, continuaré (continuaremos) conservando los correspondientes derechos patrimoniales sin modificación o restricción alguna, puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación de los derechos patrimoniales derivados del régimen del Derecho de Autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “*Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores*”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables. En consecuencia, la Universidad de Cundinamarca está en la obligación de RESPETARLOS Y HACERLOS RESPETAR, para lo cual tomará las medidas correspondientes para garantizar su observancia.

NOTA: (Para Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía):

Información Confidencial:

Esta Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, contiene información privilegiada, estratégica, secreta, confidencial y demás similar, o hace parte de la investigación que se adelanta y cuyos resultados finales no se han publicado. **SI ___NO__X_.**

En caso afirmativo expresamente indicaré (indicaremos), en carta adjunta tal situación con el fin de que se mantenga la restricción de acceso.

LICENCIA DE PUBLICACIÓN

Como titular(es) del derecho de autor, confiero(erimos) a la Universidad de Cundinamarca una licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integrará en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

Diagonal 18 No. 20-29 Fusagasugá – Cundinamarca
Teléfono (091) 8281483 Línea Gratuita 018000976000
www.ucundinamarca.edu.co E-mail: info@ucundinamarca.edu.co
NIT: 890.680.062-2



MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAR113
PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
	PAGINA:6 de 7

- a) Estará vigente a partir de la fecha de inclusión en el repositorio, por un plazo de 5 años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del autor. El autor podrá dar por terminada la licencia solicitándolo a la Universidad por escrito. (Para el caso de los Recursos Educativos Digitales, la Licencia de Publicación será permanente).
- b) Autoriza a la Universidad de Cundinamarca a publicar la obra en formato y/o soporte digital, conociendo que, dado que se publica en Internet, por este hecho circula con un alcance mundial.
- c) Los titulares aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto, renuncian a recibir beneficio alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente licencia y de la licencia de uso con que se publica.
- d) El(Los) Autor(es), garantizo(amos) que el documento en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi (nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro(aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos es de mí (nuestro) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.
- e) En todo caso la Universidad de Cundinamarca se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del autor y la fecha de publicación.
- f) Los titulares autorizan a la Universidad para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.
- g) Los titulares aceptan que la Universidad de Cundinamarca pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.
- h) Los titulares autorizan que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados en los literales anteriores bajo los límites definidos por la universidad en el “Manual del Repositorio Institucional AAAM003”
- i) Para el caso de los Recursos Educativos Digitales producidos por la Oficina de Educación Virtual, sus contenidos de publicación se rigen bajo la Licencia



CreativeCommons: Atribución- No comercial- Compartir Igual.



j) Para el caso de los Artículos Científicos y Revistas, sus contenidos se rigen bajo la Licencia CreativeCommons Atribución- No comercial- Sin derivar.



Nota:

Si el documento se basa en un trabajo que ha sido patrocinado o apoyado por una entidad, con excepción de Universidad de Cundinamarca, los autores garantizan que se ha cumplido con los derechos y obligaciones requeridos por el respectivo contrato o acuerdo.

La obra que se integrará en el Repositorio Institucional, está en el(los) siguiente(s) archivo(s).

Nombre completo del Archivo Incluida su Extensión (Ej. PerezJuan2017.pdf)	Tipo de documento (ej. Texto, imagen, video, etc.)
1. Modelación del efecto Doppler acústico en medios dispersivos.	texto
2.	
3.	
4.	

En constancia de lo anterior, Firmo (amos) el presente documento:

APELLIDOS Y NOMBRES COMPLETOS	FIRMA (autógrafa)
Anyi Biviana Moreno Ibague	

Código Serie Documental (Ver Tabla de Retención Documental).

Modelación del Efecto Doppler Acústico en Medios Dispersivos

Anyi Biviana Moreno Ibagué

Universidad de Cundinamarca
Facultad de Educación
Licenciatura en Matemáticas
Fusagasugá
Julio 2019

Modelación del Efecto Doppler Acústico en Medios Dispersivos

Anyi Biviana Moreno Ibagué

Proyecto de tesis presentado para optar al título profesional de: *Licenciado(a) en Matemáticas.*

Asesor: Alejandro Duitama Leal

Universidad de Cundinamarca
Facultad de Educación
Licenciatura en Matemáticas
Fusagasugá
Julio 2019

Dedicatoria

Dedico este trabajo principalmente a Dios, por permitirme dar este paso tan importante en mi vida profesional. A mi madre, por ser ejemplo de perseverancia y humildad. A mi padre, por siempre confiar en mi, por ser el ejemplo de un hombre honrado, perseverante y comprometido. Por último dedico este trabajo a mi hija Sara Valeria Torres Moreno, quien ha sido mi motivación para salir adelante, quien es fuente de inspiración para luchar contra las adversidades y salir triunfante ante cualquier situación.

Agradecimientos

Quiero manifestar a Dios mi gratitud, porque su bendición llena mi vida y es mi fortaleza en aquellos momentos de dificultad y debilidad.

Agradezco a todas aquellas personas que me acompañaron en este arduo proceso, que me apoyaron con conocimiento, tiempo, comprensión y amistad, para la culminación este proyecto. Doy gracias a mis padres Emilcen Ibagué Molina y Omar Eduardo Moreno Villalobos (D.E.P.), por brindarme siempre un buen ejemplo de perseverancia y compromiso, por creer y confiar en mí, por ser mi soporte en los momentos más difíciles, por los consejos y valores que me han inculcado.

A mis compañeros de carrera, que han sido parte fundamental en mi formación personal y profesional, quienes me acompañaron en los momentos que sentía desfallecer, quienes me brindaron una voz de aliento cuando más lo necesitaba.

Finalmente, quiero expresar mi más grande y sincero agradecimiento al docente Alejandro Duitama, quien me brindó su confianza y conocimiento, que con su dirección, enseñanza y colaboración fue de gran ayuda en el desarrollo de este proyecto.

Resumen

En el presente estudio se realizó el modelamiento numérico del efecto Doppler, analizando el cambio de la frecuencia percibida según el movimiento relativo entre fuente y observador. Se utiliza el Método de Diferencias Finitas para discretizar la ecuación de onda en dos dimensiones, en el modelamiento se acoplaron fronteras no reflectivas empleando el método Perfectly Matched Layer (PML) con el fin de evitar efectos de borde en la simulación, el código fue realizado en el lenguaje de programación C++.

Para la modelación en medios dispersivos, se emplea la ecuación de onda adicionando dos parámetros, un parámetro de atenuación por difusión y otro de viscosidad. Se analizó el efecto Doppler en estos medios, enfocándose principalmente en el cambio de la frecuencia percibido según cada simulación.

Como resultado se evidenció que el método numérico empleado para la solución de ecuación de onda permite modelar de manera efectiva el efecto Doppler, corroborando los postulados teóricos al respecto y verificando la fórmula analítica obtenida para dicho efecto. En un medio dispersivo, particularmente en el aire, se presenta una variación baja en la frecuencia, en comparación con un medio no dispersivo, sin embargo, al cambiar el parámetro de atenuación por difusión y la velocidad, se presenta un cambio en la amplitud de la onda según sea el caso. Cuando la fuente de sonido se aleja de un observador en reposo, el espectro de frecuencias manifiesta un corrimiento hacia bajas frecuencias a medida que aumenta la velocidad, en los demás casos cuando el observador está cerca de la fuente, existe un corrimiento hacia altas frecuencias respecto a la frecuencia característica. Finalmente, en un medio dispersivo se manifiesta una variación en la frecuencia, pero los casos del efecto Doppler mantienen un mismo comportamiento.

Palabras claves— Efecto Doppler, Diferencias Finitas, Modelación, PML, frecuencia, dispersivo.

Índice general

1	Introducción	2
2	Definición del problema	4
2.1	Planteamiento del problema	4
2.1.1	Formulación del problema	5
2.2	Justificación	5
2.3	Objetivos	5
2.3.1	Objetivo General	5
2.3.2	Objetivos específicos	5
3	Marco de Antecedentes	6
3.1	Estado del Arte	6
4	Marco Teórico	11
4.1	Efecto Doppler	11
4.2	Medio Dispersivo	12
4.3	Ecuación de Onda	13
4.4	Ecuación de onda para medios dispersivos	14
4.5	Método de Diferencias Finitas	14
4.6	Fronteras PML	18
4.7	Transformada Discreta de Fourier	19
5	Marco Metodológico	20
5.1	Método y técnica de investigación	20
5.2	Diseño de la investigación	20
6	Desarrollo del proyecto	21
6.1	Discretización de la Ecuación de Onda	21
6.2	Validación	22
6.3	Discretización de la ecuación de onda para medios dispersivos	33

7	Resultados	35
7.1	Caso I: Observador en reposo y la fuente se aleja	36
7.2	Caso II: Observador en reposo y la fuente se acerca al observador	39
7.3	Caso III: Observador y fuente se acercan entre sí	42
7.4	Caso IV: Fuente en reposo y el observador se acerca hacia la fuente	44
8	Conclusiones	47
9	Recomendaciones	50
	Bibliografía	50
	Anexos	52
A	Deducción de las ecuaciones del efecto Doppler	53
A.1	Fuente y Observador en reposo	54
A.2	Fuente en reposo y observador en movimiento	54
A.2.1	El observador se mueve hacia la fuente	55
A.2.2	El observador se aleja de la fuente	56
A.3	Observador en reposo y fuente en movimiento	57
A.3.1	La fuente se mueve hacia el observador	57
A.3.2	La fuente se aleja del observador en reposo	59
A.4	Fuente y observador en movimiento	60
A.4.1	Fuente y observador se acercan entre sí	60
A.4.2	Fuente y Observador se alejan entre sí	61
A.5	Generalización	61
B	Ecuación de onda	62
B.1	Ecuación de onda lineal	62
C	Método de diferencia finitas	67
C.1	Derivadas en una dimensión	67
C.1.1	Diferencias Finitas Progresivas	67
C.1.2	Diferencias Finitas Regresivas	68
C.1.3	Diferencias Finitas Centradas	69
C.1.4	Derivadas en dos dimensiones	70
D	Discretización de la ecuación de onda bidimensional	76
E	Discretización de la ecuación de onda en medios dispersivos	78

F	Gráficas de la amplitud en función del tiempo	83
F.1	Caso I: Observador en reposo y la fuente se aleja	84
F.1.1	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 0 \text{ Hz}$	84
F.1.2	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 2,5 \text{ Hz}$	85
F.1.3	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 5 \text{ Hz}$	86
F.1.4	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 7,5 \text{ Hz}$	87
F.1.5	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 10 \text{ Hz}$	88
F.2	Caso II: Observador en reposo y la fuente se acerca	89
F.2.1	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 0 \text{ Hz}$	89
F.2.2	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 2,5 \text{ Hz}$	90
F.2.3	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 5 \text{ Hz}$	91
F.2.4	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 7,5 \text{ Hz}$	92
F.2.5	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 10 \text{ Hz}$	93
F.3	Caso III: Observador y fuente se acercan entre sí	94
F.3.1	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 0 \text{ Hz}$	94
F.3.2	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 2,5 \text{ Hz}$	95
F.3.3	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 5 \text{ Hz}$	96
F.3.4	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 7,5 \text{ Hz}$	97
F.3.5	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 10 \text{ Hz}$	98
F.4	Caso IV: Fuente en reposo y el observador se acerca a ésta	99
F.4.1	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 0 \text{ Hz}$	99
F.4.2	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 2,5 \text{ Hz}$	100
F.4.3	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 5 \text{ Hz}$	101
F.4.4	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 7,5 \text{ Hz}$	102
F.4.5	Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 10 \text{ Hz}$	103

Índice de tablas

Tabla 3.0.1	Antecedentes sobre el efecto Doppler.	6
Tabla 6.2.1	Parámetros de la simulación	24
Tabla 6.2.2	Frecuencia percibida por un observador en reposo cuando la fuente se aleja, comparación entre frecuencia simulada y frecuencia teórica.	26
Tabla 6.2.3	Frecuencia percibida por un observador en reposo y la fuente se mueve hacia él, frecuencia según la simulación y frecuencia teórica.	28
Tabla 6.2.4	Frecuencia percibida simulada y teórica, para el caso cuando fuente y observador se acercan entre sí	30
Tabla 6.2.5	Frecuencia simulada y frecuencia teórica para el caso cuando el observador se mueve hacia una fuente en reposo	32
Tabla 7.0.1	Parámetros empleados para la simulación en medios dispersivos	35
Tabla 7.0.2	Valores para el coeficiente de atenuación por difusión	36
Tabla 7.1.1	Valores de la frecuencia en el caso cuando la fuente se aleja del observador en reposo	38
Tabla 7.2.1	Valores de la frecuencia percibida por un observador en reposo cuando una fuente se acerca.	41
Tabla 7.3.1	Frecuencia percibida por el observador cuando fuente y observador se acercan entre sí.	44
Tabla 7.4.1	Frecuencia percibida por un observador que se acerca a una fuente en reposo.	46

Índice de figuras

Figura 6.2.1 Pantallazo de la simulación el efecto Doppler realizada en C++	23
Figura 6.2.3 La fuente se aleja del observador en reposo, $\vec{v}_o = 0 \text{ m/s}$. La fuente se mueve entre velocidades de 10 m/s a 60 m/s	25
Figura 6.2.4 Transformada Discreta de Fourier para el caso cuando la fuente se aleja del observador en reposo, la fuente se mueve a diferentes velocidades y emite una señal con frecuencia de 100 Hz	25
Figura 6.2.6 La fuente se acerca a un observador en reposo, $\vec{v}_o = 0 \text{ m/s}$. La fuente se mueve entre velocidades de 10 m/s a 60 m/s	27
Figura 6.2.7 Transformada Discreta de Fourier para el caso cuando la fuente se acerca al observador en reposo, la fuente emite una señal con frecuencia de 100 Hz .	28
Figura 6.2.9 La fuente y el observador se acercan entre sí. El observador mantiene una velocidad de $\vec{v}_o = 20 \text{ m/s}$ y la fuente se mueve entre velocidades de 10 m/s a 60 m/s	29
Figura 6.2.10 Transformada Discreta de Fourier para el análisis frecuencia en el caso cuando la fuente y observador se acercan entre sí, la señal emitida por la fuente tiene una frecuencia de 100 Hz	30
Figura 6.2.11 El observador se acerca a una fuente de sonido inmóvil, $\vec{v}_s = 0 \text{ m/s}$. La velocidad de la fuente varía entre 10 m/s y 60 m/s	31
Figura 6.2.12 Transformada Discreta de Fourier para analizar el cambio de la frecuencia percibida por un observador que se mueve hacia una fuente en reposo.	32
Figura 7.1.2 Espectro de frecuencias cuando una fuente en movimiento se aleja de un observador en reposo.	38
Figura 7.2.2 Espectro de frecuencias figura cuando la fuente se acerca un observador en reposo.	40
Figura 7.3.2 Espectro de frecuencias cuando el observador y la fuente se acercan entre sí.	43
Figura 7.4.2 Espectro de frecuencias cuando el observador se acerca a una fuente en reposo.	45
Figura A.1.1 Fuente y observador en reposo.	54

Figura A.2.1 El observador se acerca a una fuente de sonido en reposo.	55
Figura A.2.2 El observador se aleja de la fuente en reposo.	56
Figura A.3.1 El observador en reposo y la fuente de sonido se acerca a éste.	57
Figura A.3.2 Fuente de sonido se aleja del observador en reposo	59
Figura B.1.1 Cuerda. Deducción de la ecuación de onda lineal.	62
Figura B.1.2 Descomposición vectorial de fuerza aplicada a una cuerda de longitud Δx	63
Figura F.1.2 La fuente se aleja del observador con diferentes velocidades que cambian entre 10 m/s y 60 m/s y el observador permanece en reposo, $\chi = 0\text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$	84
Figura F.1.4 La fuente se aleja del observador variando la velocidad entre $10 - 60\text{ m/s}$ y el observador permanece en reposo, $\chi = 2,5\text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$	85
Figura F.1.5 La fuente se aleja del observador con diferentes velocidades, entre $10\text{ m/s} -$ 60 m/s y el observador permanece en reposo, donde $\chi = 5\text{ Hz}$ $\gamma =$ $1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$	86
Figura F.1.6 La fuente se aleja del observador con diferentes velocidades y el observador permanece en reposo, con $\chi = 7,5\text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$	87
Figura F.1.7 La fuente se aleja del observador con velocidades entre 10 m/s y 60 m/s y el observador permanece en reposo, con $\chi = 10\text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$	88
Figura F.2.1 La fuente se acerca al observador con diferentes velocidades y el observador permanece en reposo, con $\chi = 0\text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$	89
Figura F.2.2 La fuente se acerca al observador con velocidades entre 10 m/s y 60 m/s y el observador permanece en reposo, con $\chi = 2,5\text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$	90
Figura F.2.3 La fuente se acerca al observador con velocidades entre 10 m/s y 60 m/s , el observador permanece en reposo, con $\chi = 5\text{ Hz}$ - $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$	91
Figura F.2.4 La fuente se acerca al observador con velocidades entre $10\text{ m/s} - 60\text{ m/s}$ y el observador permanece en reposo, con $\chi = 7,5\text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot$ $\frac{s}{m^2}$	92
Figura F.2.5 La fuente se acerca al observador con velocidades entre 10 m/s y 60 m/s , el observador permanece en reposo, con $\chi = 10\text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$	93
Figura F.3.1 La fuente y el observador se acercan entre sí, el observador se mueve a 20 m/s y la fuente cambia su velocidad entre 10 m/s y 60 m/s ,tomando $\chi = 0\text{ Hz}$ $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$	94
Figura F.3.2 La fuente y el observador se acercan entre sí, el observador se mueve a 20 m/s y la fuente cambia su velocidad entre 10 m/s y 60 m/s , con $\chi = 2,5\text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$	95

Figura F.3.3 La fuente y el observador se acercan entre sí, el observador se mueve a 20 m/s y la fuente cambia su velocidad entre 10 m/s y 60 m/s, con $\chi = 5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$.	96
Figura F.3.4 La fuente y el observador se acercan entre sí, el observador se mueve a 20 m/s y la fuente cambia su velocidad entre 10 m/s y 60 m/s, con $\chi = 7,5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$.	97
Figura F.3.5 La fuente y el observador se acercan entre sí, el observador se mueve a 20 m/s y la fuente cambia su velocidad entre 10 m/s y 60 m/s, con $\chi = 10 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$.	98
Figura F.4.1 El observador se acerca a una fuente de sonido inmóvil, $\vec{v}_s = 20 \text{ m/s}$. La velocidad del observador varía entre 10 m/s y 60 m/s, con $\chi = 0 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$.	99
Figura F.4.2 El observador se acerca a una fuente de sonido inmóvil, $\vec{v}_s = 20 \text{ m/s}$. La velocidad del observador varía entre 10 m/s y 60 m/s, con $\chi = 2,5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$.	100
Figura F.4.3 El observador se acerca a una fuente de sonido inmóvil, $\vec{v}_s = 20 \text{ m/s}$. La velocidad del observador varía entre 10 m/s y 60 m/s, con $\chi = 2,5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$.	101
Figura F.4.4 El observador se acerca a una fuente de sonido inmóvil, $\vec{v}_s = 20 \text{ m/s}$. La velocidad del observador varía entre 10 m/s y 60 m/s, con $\chi = 2,5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$.	102
Figura F.4.5 El observador se acerca a una fuente de sonido inmóvil, $\vec{v}_s = 20 \text{ m/s}$. La velocidad del observador varía entre 10 m/s y 60 m/s, con $\chi = 2,5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}$.	103

Capítulo 1

Introducción

El estudio de las ondas acústicas tiene gran importancia dada sus aplicaciones en diferentes campos. El sonido hace parte de la acústica, es la propagación de una perturbación en el medio, existiendo transporte de energía sin una transferencia de materia. En el sonido se presentan todos los fenómenos ondulatorios: reflexión, refracción, difracción e interferencia; además se produce el denominado efecto Doppler. Este efecto hace referencia al cambio de frecuencia aparente que se percibe dado el movimiento relativo entre fuente y observador, estableciendo que la frecuencia percibida es mayor cuando la fuente o el observador se acercan y menor cuando se aleja entre sí. Por otro lado, el comportamiento de una onda depende del medio de propagación, en particular, un medio dispersivo es aquel donde las ondas de diferentes frecuencias viajan a diferentes velocidades, produciendo un cambio en el pulso de la onda, esto debido a la pérdida de energía que surge dada la disminución en la amplitud.

El estudio del efecto Doppler en medios dispersivos, permitiría analizar el comportamiento frecuencial en medios que presentan disipación de la energía, estableciendo características importantes del mismo, logrando una mejor comprensión del espectro sonoro, en consecuencia dada la aplicabilidad de dicho efecto en la industria, la medicina, ingeniería, elaboración de radares, etc., se podría estudiar alguna aplicación del efecto Doppler en medios con pérdida de energía y considerar las incidencias del medio en el cambio frecuencial detectado. Debido a la escasa información sobre el tema, se manifiesta el interés en la presente investigación.

Para llevar a cabo la modelación del efecto Doppler en medios dispersivos, se emplea el lenguaje de programación de C++, en primer instancia se realiza la simulación del efecto Doppler en condiciones normales, tomando el aire como medio de propagación, en el programa se utilizó la discretización de la ecuación de onda por el método de diferencias finitas; también se emplea el método PML (Perfectly Matched Layer) con el fin de obtener una frontera abierta y evitar la reflexión del campo de onda. En segundo lugar, la incorporación del carácter dispersivo en el medio se

hace mediante la adición de dos nuevos términos a la ecuación de onda, el coeficiente atenuación por difusión y coeficiente de atenuación por viscosidad, se realiza la discretización de esta nueva ecuación mediante el método de diferencias finitas centradas, para su posterior simulación y adaptación al efecto Doppler.

Con los datos obtenidos se analizan los resultados en el dominio del tiempo, luego se pasa al dominio frecuencial utilizando la transformada discreta de Fourier, esto con el fin de analizar el espectro de la señal que se simuló anteriormente y estudiar los casos del efecto Doppler en un medio dispersivo, se emplean diferentes valores para el coeficiente de atenuación por difusión y el valor manejado para el coeficiente de atenuación por viscosidad se deja como el habitual.

Con los resultados obtenidos se analiza la dependencia de la frecuencia con las propiedades del medio y se realiza la comparación entre la variación de la frecuencia en un medio dispersivo y uno no dispersivo, logrando una mejor comprensión del comportamiento frecuencial en dichos medios.

Capítulo 2

Definición del problema

2.1. Planteamiento del problema

Las investigaciones realizadas sobre el efecto Doppler Acústico en medios Dispersivos no ha sido ampliamente estudiada, se conocen estudios sobre la propagación de ondas acústicas en diferentes medios, el efecto Doppler ha sido estudiado hace mucho tiempo dadas sus aplicaciones en diversas ramas de la Ciencia e ingeniería. Sin embargo, cuando la onda se propaga en un medio dispersivo no ha sido lo suficientemente estudiado y divulgado, dado lo habitual que resulta ser, donde la velocidad de propagación de la onda permanece constante y por ende su forma también. Pero cabe resaltar que dicho estudio resulta ser complejo cuando se analiza en medios donde la velocidad deja de ser constante y que además depende de otra variable, en este caso la frecuencia, es de interés analizar su incidencia en el cambio del pulso de la onda, para comprender el comportamiento frecuencial que se presenta en medios dispersivos.

El efecto Doppler puede ser aplicado a diferentes tipos de ondas, las más estudiadas en este aspecto son las ondas electromagnéticas, ya que dada sus propiedades permiten estudiar el cambio de frecuencia que se da en cada propagación de onda. Según las fuentes consultadas existe escasa información del efecto Doppler acústico en medios dispersivos.

Por tal razón se pretende analizar como se comporta el cambio de frecuencia aparente producido por el movimiento correspondiente entre fuente y observador en medios dispersivos, esto se pretende realizar mediante la modelación del efecto Doppler en estos medios, apoyándonos en un método numérico y un lenguaje de programación adecuado, además de herramientas que permitan llevar a cabo un análisis frecuencial en medios dispersivos.

2.1.1. Formulación del problema

¿Cómo puede variar el comportamiento frecuencial en cada uno de los casos del movimiento relativo entre fuente y observador, en medios donde la velocidad de la onda depende directamente de la frecuencia de la misma?

2.2. Justificación

Gracias a la coyuntura entre la física, la matemática y las herramientas computacionales, se pueden estudiar diferentes fenómenos del mundo que nos rodea. En el presente trabajo se ambiciona realizar una modelación del efecto Doppler en medios dispersivos, con el fin de obtener una mejor comprensión de este fenómeno físico en medios en los cuales la velocidad ya no es constante y depende de la frecuencia. Realizar este análisis frecuencial ayudará a la comunidad científica interesada, a comprender aún más el análisis espectral, especialmente el espectro del sonido, apuntes que pueden ser utilizados en la industria, la medicina, la ingeniería y demás.

2.3. Objetivos

2.3.1. Objetivo General

Modelar el efecto Doppler para ondas sonoras en un medio dispersivo, teniendo en cuenta los diferentes casos del movimiento relativo entre la fuente y el observador.

2.3.2. Objetivos específicos

- Simular el cambio de la frecuencia, estudiando los diferentes casos del movimiento relativo entre fuente y observador.
- Validar los resultados obtenidos.
- Analizar la dependencia de la frecuencia con las propiedades del medio.
- Comparar la variación de la frecuencia en un medio no dispersivo y en uno dispersivo.

Capítulo 3

Marco de Antecedentes

En el presente capítulo se muestran algunos trabajos y antecedentes del efecto Doppler, haciendo referencia desde aspectos teórico-conceptuales hasta investigativos, sobre el estudio del cambio de frecuencia en dicho efecto. En la tabla 3.0.1 se hace mención de algunos trabajos que tratan sobre el tema:

Año	Autor	Detalle
1842	Doppler. C	On the Coloured Light of Double Stars and Certain Other Stars of the Heavens
1985	Usagawa Tsuyoshi	Analysis of a moving sound source by the cross-spectral technique
1992	Censor. D.	Real and Complex Doppler Effects in Lossy Media
1993	Sorokin. Y.M.	Doppler effect and aberrational effects in dispersive medium
2015	Zhang. Y,Zhang.T,Ouyang.H y Li.T	SPH Simulation of Acoustic Waves: Effects of Frequency, Sound Pressure, and Particle

Tabla 3.0.1: Antecedentes sobre el efecto Doppler.

3.1. Estado del Arte

El efecto Doppler debe su nombre al físico austríaco Christian Doppler, quién describió por primera vez dicho fenómeno en 1842, realizando el primer acercamiento teórico al efecto Doppler, en su artículo *On the Coloured Light of Double Stars and Certain Other Stars of the Heavens*, presentado en un congreso realizado en Praga en Mayo de ese mismo año, en dicho trabajo se emplea la hipótesis del efecto Doppler, la cual postula que: el cambio de frecuencia se produce

cuando la fuente o el observador se mueven uno respecto al otro, lo que más adelante se conoce como efecto Doppler, en dicho congreso Doppler pretendía explicar los colores de las estrellas binarias y otros astros, estableciendo que el color es una manifestación de la frecuencia de una onda de luz, es decir, que el aumento o disminución de la luz estelar depende del movimiento relativo de la estrella. En este escrito se plantean además las ecuaciones que Doppler utilizó para determinar la frecuencia cuando el observador se acerca a una fuente estacionaria y cuando la fuente se mueve hacia el observador estacionario (Doppler, 1842).

En 1845 el científico neerlandés Christoph Hendrik Diederik Buys Ballot mostró experimentalmente el principio propuesto por Doppler, en este caso para ondas sonoras, mencionado experimento se realizó durante el trayecto en tren de Utrech a Ámsterdam, Ballot confirmó que el tono de un sonido emitido por una fuente que se aproxima al observador es más agudo que si la fuente se aleja. Utilizó una locomotora para realizar sus observaciones. Colocó un grupo de músicos en un ferrocarril y les indicó que tocaran la misma nota musical mientras que otro grupo de músicos, en la estación del tren, registraba la nota musical que oían mientras el tren se acercaba y alejaba de ellos sucesivamente. En particular el mejor ejemplo que define el efecto Doppler es el silbato de la locomotora que se acercaba y se aleja de un cuerpo inmóvil.

En 1848 el mismo fenómeno fue probado para ondas electromagnéticas por el francés Hippolyte Fizeau, ya que trabajaba con fenómenos de interferencia de la luz y de transmisión de calor. Él determinó que los cuerpos celestes que se acercan hacia la Tierra son vistos de color azul y los que se alejan se ven de color rojo. En términos generales, significa que las ondas de luz, cuando se aproximan hacia el observador se dirigen hacia el extremo ultravioleta del espectro y cuando se alejan, se aproximan hacia el extremo infrarrojo del espectro, es decir, que sus ondas, al igual que las sonoras, se vuelven más altas cuando se aproximan y más bajas cuando se distancian.

El efecto Doppler tendría años después relevancia en la teoría de la relatividad de Einstein, con lo que se conoce como el efecto Doppler Relativista. Una de sus principales aplicaciones se dio a mediados de 1930 con la invención del radar, dado el surgimiento de la II Guerra Mundial.

Por otra parte, el estudio de los medios dispersivos y por ende de las relaciones de dispersión, tiene su origen en el estudio de los prismas y la luz, fenómeno estudiado en el siglo XVIII por el famoso físico Isaac Newton, pionero de la rama de la física destinada al estudio de la luz, la óptica. Isaac Newton planteó la descomposición de la luz blanca (luz derivada de una estrella) en los diferentes colores que la constituyen. La dispersión de la luz, se manifiesta cuando un rayo de luz blanca atraviesa un material transparente y se refracta, mostrando así los diferentes colores que la componen.

Algunos trabajos realizados sobre el efecto Doppler o análisis de la frecuencia en medios dispersivos se presentan a continuación, aunque cabe resaltar que los estudios desarrollados se hacen en ondas electromagnéticas. Son escasas las investigaciones realizadas sobre el efecto Doppler para ondas sonoras en medios dispersivos.

En 1976 se demuestra una correspondencia uno a uno entre las mediciones de frecuencia en diferentes marcos de referencia inercial. Aplicando esto a ondas planas en medios homogéneos, isotropos y dispersivos, particularmente en un plasma. Plantean la diferencia entre el efecto Doppler convencional y el efecto Doppler complejo, mostrando que este último se desarrolla en medios dispersivos, desarrollando las ecuaciones del efecto Doppler para ondas electromagnéticas.

El efecto Doppler se aplica generalmente a la diferencia observada en la frecuencia entre la onda detectada por dos observadores en movimiento relativo. El efecto Doppler complejo se aplica habitualmente a la presencia de varios componentes espectrales, es decir, la descomposición espectral de la frecuencia, que percibe un observador en reposo con respecto a una fuente que emite una señal, la cual se encuentra en movimiento relativo, dicho fenómeno se presenta en los medios de carácter dispersivo (Berger, 1976).

En 1992 se realizó un estudio titulado *Real and Complex Doppler Effects in Lossy Media*, en el cual se investiga el efecto Doppler en medios que presentan pérdida de energía. Se muestra que la propagación en medios con pérdida de energía, implica el efecto Doppler complejo, es decir, la atenuación espacial del medio se transforma en parámetros temporales de la señal recibida, produciendo cambios en la frecuencia compleja para valores de frecuencia real, esto analizando la dispersión de las ondas de objetos en movimiento. Además se hace un análisis espectral para la señal en el dominio de tiempo, de lo cual se concluye que dicho contenido es igual para los medios sin pérdida y con pérdida de energía.

Se establece que la transformación dada entre espacio y tiempo, facilita la evaluación de la atenuación de la señal recibida. Para apoyar lo anteriormente mencionada realizan una simulación numérica al respecto, determinando el cambio de frecuencia en la señal utilizando transformada de Fourier (Censor, 1992).

En 1993, Yu. M. Sorokin en *Doppler effect and aberrational effects in dispersive medium*, comenta que el efecto Doppler se aplica a sistemas de cualquier naturaleza física y representa un cambio en la frecuencia de algún proceso periódico. Al mismo tiempo, el cambio en la orientación del rayo o el vector de onda (efecto aberración relativista) está estrechamente relacionado con este

efecto se ha asociado tradicionalmente con ondas ópticas en el vacío. Este efecto se presenta principalmente en medios dispersivos, donde ambos efectos están tan estrechamente relacionados que solo se pueden entender mediante el análisis conjunto (Sorokin, 1993).

Este último trabajo aunque no tiene relación directa con el tema, son interesantes los resultados obtenidos por ende su mención. En el 2015 se llevo a cabo una investigación en la cual se analizan los problemas acústicos en sistemas multifasicos o con limites deformables, resuelven ecuaciones acústicas con la teoría de SPH, con la cual proponen una simulación para la propagación de ondas acústicas unidimensionales, teniendo en cuenta aspectos como los efectos de la frecuencia, la presión del sonido y el esparcimiento de las partículas, dicho trabajo se titula *SPH Simulation of Acoustic Waves: Effects of Frequency, Sound Pressure, and Particle*.

Hacen el estudio en un rango limitado de frecuencia, obteniendo un aumento no lineal y que además el aumento de la frecuencia hace mayor el error de la simulación, mientras que los niveles de la presión no inciden directamente sobre el modelo (Zhang et al., 2015).

En 1985 se realiza una investigación sobre el movimiento de una fuente de sonido utilizando una técnica espectral, se propone reducir el cambio de frecuencia de la señal observada, para esto asume la fuente de sonido como un punto fijo y las demás fuente se asumen en movimiento, calculando la velocidad relativa respecto a la fuente específica del sonido. El método funciona como un detector selectivo de una fuente específica. Según los resultados obtenidos el método es efectivo, compensado las consecuencias del efecto Doppler con el retraso de propagación.

Cuando se pretende estudiar el espectro del sonido o de una señal, es relevante considerar cuando la señal no se puede separar fácilmente de los ruidos que la rodean, además se debe tener en cuenta que el espectro observado cambia en el tiempo debido a la presencia del efecto Doppler cuando una fuente de sonido esta en movimiento. Para dar solución a esto plantean hacer una compensación del efecto Doppler logrando una reducción del cambio de frecuencia mediante una compensación en el retardo de la propagación. Para analizar el espectro de frecuencias utilizan la transformada de Fourier continua .

Cuando la propagación se hace en un medio y no dispersivo, la señal observada puede expresarse como una onda proporcional a la señal del sonido.

Digitalizan una serie de datos en un intervalo Δt con el objetivo de construir el espectro tanto de la señal específica como de las señales de alrededor, aplican transformada discreta de Fourier además de una técnica de interpolación usando la función Spline de tercer orden. Los ejes del

tiempo se transfieren mediante la transformada discreta de Fourier (DFT) para reducir el cambio de frecuencia provocado por el efecto Doppler y así obtener el espectro de la señal.

Obtienen resultados experimentales para una señal de una fuente en movimiento, encontrando una onda sinusoidal de $500Hz$ y una velocidad de $8,3m/s$, analizan estas condiciones para el espectro con y sin compensación del efecto Doppler.

Mostrando que en el caso de no compensar el efecto Doppler, el pico de frecuencias de $500Hz$ esta $3dB$ mas bajo que el pico de $400Hz$, mientras que en el caso de la compensación del efecto Doppler mediante la técnica espectral el pico de $500Hz$ esta $10dB$ por arriba del pico de $400Hz$, es decir, que para la señal de una fuente en movimiento al reducir el cambio de frecuencia producido por efecto Doppler, ésta presenta una variación de intensidad notable en relación de la frecuencia principal respecto a otros picos de frecuencia (Usagawa et al., 1985).

Capítulo 4

Marco Teórico

En este capítulo se presentan conceptos teóricos necesarios para comprender el desarrollo del proyecto, los cuales permiten argumentar de manera sólida lo posteriormente expuesto. Se inicia con el concepto de Efecto Doppler, mencionando la fórmula de generalización para los diferentes casos que se pueden presentar con el movimiento relativo entre fuente y observador, la deducción paso a paso de la fórmula para cada uno de los casos estudiados se pueden ver en el Anexo A, luego se define lo que es un medio dispersivo, posteriormente se presenta la ecuación de onda para medios no dispersivos y para medios dispersivos, para la primera se realizó la deducción de la ecuación de onda en una cuerda vibratoria (ver Anexo B). Seguidamente se hace una explicación del método de diferencias finitas y de las fórmulas utilizadas para la aproximación de las derivadas, la deducción de las fórmulas para la aproximación de derivadas para este método se encuentran en el Anexo C, en seguida se mencionan aspectos importantes del método de fronteras PML y por último se hace alusión a la transformada discreta de Fourier.

4.1. Efecto Doppler

El efecto Doppler, es un fenómeno que explica la relación entre la frecuencia transmitida y la frecuencia observada cuando fuente y observador se mueven, uno respecto al otro. En el caso de que un observador este delante de una fuente en movimiento, percibirá una frecuencia mayor a la realmente emitida, mientras que un observador ubicado detrás de la fuente observará una menor frecuencia entre los frentes de onda y por ende una menor frecuencia (Serway, 2008).

Esto se puede evidenciar en diferentes escenarios de la vida diaria, uno de estos al escuchar la sirena de una ambulancia o un automóvil, el sonido va cambiando conforme que se acerca hacia nosotros, se escucha con un tono más fuerte cuando se acerca y un tono más bajo cuando se aleja. El efecto Doppler no solo se aplica a ondas sonoras, sino a cualquier tipo de ondas, teniendo así un gran campo de aplicación, en diferentes disciplinas como la medicina, la meteorología, astro-

nomía, entre otras.

Los casos que se presentan en el efecto Doppler, con relación al movimiento relativo entre fuente y observador son:

Caso 1: fuente en reposo y observador se aleja de la fuente.

Caso 2: fuente en reposo y observador se mueve hacia la fuente.

Caso 3: observador estacionario y la fuente se aleja del observador.

Caso 4: observador estacionario y la fuente se acerca al observador.

Caso 5: fuente y observador se acercan entre sí.

Caso 6: fuente y observador se alejan entre sí.

La ecuación general para el efecto Doppler viene dada por la siguiente ecuación, la cual establece todos los casos que se pueden presentar en el movimiento relativo entre fuente y observador, la deducción completa de cada caso se muestra en el Anexo A:

$$f_o = \left(\frac{\vec{v} \pm \vec{v}_o}{\vec{v} \mp \vec{v}_s} \right) f_s$$

Donde:

- f_o es la frecuencia observada.
- \vec{v} es la velocidad del medio.
- \vec{v}_o es la velocidad del observador.
- \vec{v}_s es la velocidad de la fuente.

Los signos superiores hacen referencia cuando la fuente y el observador se acercan uno con respecto al otro, mientras que los signos inferiores implican que se alejan.

La frecuencia es mayor conforme el observador y la fuente se acercan entre sí y más baja conforme se alejan (Giancoli, 2008).

4.2. Medio Dispersivo

Un medio dispersivo es un medio en el que las ondas de diferentes frecuencias viajan a diferentes velocidades (Samiullah, 2015).

Si la velocidad de onda depende exclusivamente de las propiedades físicas del medio, en este caso la velocidad permanece constante, lo cual implica que todas las frecuencias viajan a igual

velocidad, por lo tanto las ondas ó pulsos de onda mantendrán siempre la misma forma, lo mencionado anteriormente corresponde a medios no dispersivos.

En el caso contrario, en los medios dispersivos, la velocidad de la onda depende de la frecuencia de la onda, en este sentido con frecuencias más altas las ondas viajan a una mayor velocidad que con frecuencias más bajas. Como resultado, el pulso de onda se extiende y cambia de forma a medida que viaja (Russell, 2011).

Un medio dispersivo también se puede definir como “un medio en el cual la velocidad de fase de una onda esta en función de su frecuencia” (Radmanesh, 2007).

En un medio dispersivo la velocidad de propagación de la onda depende exclusivamente de la frecuencia, entonces si se tiene un paquete de ondas con diferentes tonos o frecuencias fundamentales, cada componente frecuencial viaja a una velocidad diferente, como resultado el paquete de onda se dispersará, es decir, cada vez estará menos concentrado en el espacio y se extenderá, esto viene dado por la relación de dispersión que se presente con respecto a la frecuencia (Cuadrado, 2013).

En un medio no dispersivo la velocidad de grupo es igual a la velocidad de fase, mientras que en un medio dispersivo estas no son iguales (Capra, 2014, pág 5) es decir, que dado un paquete de ondas que se combinan para dar lugar a una perturbación compuesta, ésta viaja a una velocidad distinta en relación a la velocidad que viajan las ondas que las constituyen (Heisenberg, 2008).

Una relación de dispersión es aquella donde describe el efecto de la dispersión en el medio. Dicha relación se puede obtener teniendo en cuenta la longitud de onda y su frecuencia, número de una onda y su frecuencias. La relación de dispersión mas general es la de Kramers-Knoning, estableciendo una dependencia entre la frecuencia de propagación y la atenuación de la onda, es decir, la dependencia entre la frecuencia y la perdida gradual de la intensidad del flujo, en este caso la intensidad acústica, la energía que fluye en el medio.

4.3. Ecuación de Onda

La ecuación de onda es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, de carácter hiperbólico que describe la propagación de gran variedad de ondas, Jean le Rond d’Alembert (1746) fue el primero en analizar el problema de propagación en una cuerda vibrante, cuya deducción se puede

ver en el Anexo B, la ecuación de una onda unidimensional esta dada por:

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

Donde $\phi(x, t)$ es la función de onda, función que describe el campo de onda de cualquier partícula en un instante cualquiera, es decir, el desplazamiento de la onda, v es la velocidad de propagación, t es el tiempo y x hace referencia a la propagación unidimensional de la onda. El primer término de la ecuación 4.1 es la segunda derivada parcial de $\phi(x, t)$ con respecto al tiempo, mientras que el término después de la igualdad es el producto de la velocidad de propagación con la segunda derivada espacial de $\phi(x, t)$ respecto a x , a la derivada espacial en dos o más dimensiones se le conoce como operador de Laplace o Laplaciano.

4.4. Ecuación de onda para medios dispersivos

Un medio dispersivo es aquel que presenta pérdida de energía, debido a la diferencia entre la velocidad de fase y la velocidad de grupo del paquete de ondas, ya que la velocidad depende directamente de la frecuencia. Para la propagación de una onda en este tipo de medios, se puede utilizar la siguiente ecuación (Korneev et al., 2004):

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} + \chi \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} - v^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.2)$$

Donde $\phi(x, t)$ describe el desplazamiento de la onda, t es el tiempo, v es la velocidad de propagación, χ es el coeficiente de atenuación por difusión y γ es el coeficiente de atenuación por viscosidad. El primer término de la ecuación 4.2 hace referencia a la segunda derivada de la función $\phi(x, t)$ con respecto al tiempo, el segundo es el producto entre el coeficiente de atenuación por difusión y la primer derivada de $\phi(x, t)$ con respecto a t , el tercer término es el producto de entre el coeficiente de atenuación por viscosidad y la derivada cruzada de la segunda derivada de $\phi(x, t)$ respecto a x con la primer derivada temporal de $\phi(x, t)$ y el último término es el producto entre la velocidad de propagación con la segunda derivada espacial de $\phi(x, t)$ respecto a x .

4.5. Método de Diferencias Finitas

El método de Diferencias Finitas (MDF) es un método numérico que permite la resolución de ecuaciones diferenciales parciales definidas en número finito de puntos, es apropiado para el tratamiento de problemas en una, dos y tres dimensiones. Con este método se realiza una aproximación de las derivadas parciales mediante un número finito de expresiones algebraicas en términos de la variable dependiente de los puntos seleccionados, estos puntos se convierten en incógnitas del

sistema de ecuaciones (Carrillo Ledesma et al., 2018).

Para realizar los cálculos numéricos en diferencias finitas se suele aproximar $f(x)$ mediante un polinomio alrededor de $x = x_0$, dicha aproximación se puede realizar usando la serie de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\Delta x)^n \quad (4.3)$$

donde $\Delta x = (x - a)$.

La serie de Taylor fue estudiada desde el filósofo griego Zenón de Elea, quién planteó el problema de sumar una serie infinita hasta obtener un resultado finito, convirtiéndose luego en una de las paradojas de Zenón; también Aristóteles, Demócrito y Arquímedes analizaron el problema. En 1715 británico Brook Taylor realizó publicaciones formales al respecto, derivando de éste el nombre de la serie. La serie de Taylor es una serie funcional, en la cual se puede aproximar la solución de una función en términos de sus derivadas alrededor de un punto particular, considerando la función $f(x)$ infinitamente diferenciable.

La expansión de la serie de Taylor de una función $f(x)$ alrededor de un punto x_i , esta dada por:

$$f(x) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)\Delta x}{1!} + \frac{f''(x_i)\Delta x^2}{2!} + \frac{f'''(x_i)\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (4.4)$$

Existen diferentes formas para determinar la aproximación de las derivadas de una función empleando diferencias finitas, dichas aproximaciones pueden variar según la cantidad de puntos que se tomen de la malla y el truncamiento que se realice. Se puede usar diferencias progresivas si se expande alrededor de $x = x_i + \Delta x$, regresivas si se considera $x = x_i - \Delta x$ y centradas si se utiliza una expansión tanto en $x = x_i + \Delta x$ como en $x = x_i - \Delta x$. La obtención de las aproximaciones para la primer y segunda derivada tanto en una como en dos dimensiones, se pueden ver en Anexos C.

La aproximación de la primer derivada de una función $f(x)$ utilizando la expansión de la serie de Taylor da como resultado:

- Diferencias progresivas

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (4.5)$$

- Diferencias regresivas

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} \quad (4.6)$$

- Diferencias centradas

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (4.7)$$

Para la aproximación de la segunda derivada en una dimensión, se emplean diferencias regresivas y progresivas, obteniendo:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (4.8)$$

Al considerar una función $f(x, y)$ infinitamente derivable, la aproximación de la primer derivada respecto a x e y esta dada por:

■ Diferencias progresivas

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - f(x_i, y_j)}{\Delta x} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - f(x_i, y_j)}{\Delta y} \quad (4.10)$$

■ Diferencias regresivas

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{f(x_i, y_j) - f(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta x} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{f(x_i, y_j) - f(x_i, y_j - \Delta y)}{\Delta y} \quad (4.12)$$

■ Diferencias centradas

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - f(x_i - \Delta x, y_j)}{2\Delta x} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - f(x_i, y_j - \Delta y)}{2\Delta y} \quad (4.14)$$

Para la aproximación para la segunda derivada de una función $f(x, y)$ se emplean diferencias centradas respecto a cada variable, dejando la otra constante.

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta x^2} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i, y_j - \Delta y)}{\Delta y^2} \quad (4.16)$$

Ahora, en el caso de tener una derivada cruzada, se emplea cualquier tipo de diferencias para aproximar la expresión interna y luego la externa, por ejemplo, la derivada cruzada de primer orden quedaría:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} &\approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y) - f(x_i - \Delta x, y_j + \Delta y)}{4\Delta x \Delta y} \\ &\quad - \frac{f(x_i + \Delta x, y_j - \Delta y) + f(x_i - \Delta x, y_j - \Delta y)}{4\Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Si se tiene una derivada de segundo orden, se aproxima la derivada interna mediante alguna de las diferencias, luego se aproxima la derivada externa obteniendo de este modo el resultado deseado.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \quad (4.18)$$

■ Diferencias centradas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} &\approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y) - 2f(x_i, y_j + \Delta y) + f(x_i - \Delta x, y_j + \Delta y)}{2\Delta y \Delta x^2} \\ &\quad - \frac{f(x_i + \Delta x, y_j - \Delta y) - 2f(x_i, y_j - \Delta y) + f(x_i - \Delta x, y_j - \Delta y)}{2\Delta y \Delta x^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

■ Diferencias progresivas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} &\approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y) - 2f(x_i, y_j + \Delta y) + f(x_i - \Delta x, y_j + \Delta y)}{\Delta y \Delta x^2} \\ &\quad - \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta y \Delta x^2} \end{aligned} \quad (4.20)$$

■ Diferencias Regresivas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} &\approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta y \Delta x^2} \\ &\quad - \frac{f(x_i + \Delta x, y_j - \Delta y) - 2f(x_i, y_j - \Delta y) + f(x_i - \Delta x, y_j - \Delta y)}{\Delta y \Delta x^2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Hasta el momento se ha visto como discretizar la parte espacial de las ecuaciones diferenciales parciales, en este apartado se plantea una discretización utilizando diferencias finitas con respecto al tiempo, que resulta ser similar a la parte espacial. La aproximación para la primer derivada utilizando diferencias regresivas, progresivas y centradas respectivamente sería:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f(x, t) - f(x, t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (4.24)$$

Para la aproximación de la segunda derivada se emplean diferencias centradas:

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = \frac{f(x, t + \Delta t) - 2f(x, t) + f(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2} \quad (4.25)$$

4.6. Fronteras PML

El método de PML (Perfectly Matched Layer) se utiliza al modelar la ecuación de onda, es un tipo de frontera artificial que soluciona problemas de límites abiertos, esto para evitar la reflexión en la región de estudio. Este método se utiliza con mayor frecuencia al emplear métodos numéricos como diferencias finitas o elementos finitos, ya que se hace necesario eliminar los límites en el dominio finito, para evitar el fenómeno de reflexión, esto conlleva a tener que ampliar el área de estudio con el fin de evitar que las reflexiones de los bordes afecten la región de estudio (Ruiz et al., 2006).

Al utilizar métodos numéricos de solución discreta para modelar la propagación de una onda, se presentan fenómenos de reflexión en los límites de la malla, que no permiten analizar los fenómenos que realmente se presentan, una de las soluciones que se plantean es la creación de fronteras no reflectivas reduciendo la amplitud en los puntos que están presentes sobre los límites de la malla numérica (Cerjan et al., 1985). El método PML consiste en crear una capa absorbente ubicada en los extremos de la malla, ampliando en cierto modo el dominio computacional, trabajando en un espacio libre sin límites teóricos. Con este método se pueden crear puntos intermedios en los puntos de la malla, dichos puntos poseen información del campo de onda, según la discretización realizada se puede atenuar el campo de onda a los puntos vecinos. (Berenger, 1994).

Al utilizar fronteras PML permite manejar problemas de frontera como una frontera libre o de espacio libre, el campo de onda se atenúa, evitando una reflexión del tipo extremo libre

($\frac{\partial \phi(x,y,t)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \phi(x,y,t)}{\partial y} = 0$) o extremo fijo ($\phi(x, y, t) = 0$). Para implementar el método PML primero se realiza una grilla para discretizar el espacio en un número entero de puntos, en los cuales se representará el valor de la función ϕ en el tiempo t para cada posición (x, y) , esto según las ecuaciones determinadas para la discretización de la ecuación de onda (Duitama, 2013).

4.7. Transformada Discreta de Fourier

La transformada discreta de Fourier es una transformación discreta que se emplea ampliamente en el análisis de Fourier, es decir, es el análisis del espectro frecuencial de cualquier señal. Es capaz de transformar una función en el dominio tiempo en otra representada en el dominio de frecuencias. En un espacio discreto se emplea la siguiente fórmula para la transformada discreta de Fourier para cualquier señal x_n :

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \quad (4.26)$$

donde $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Además se debe cumplir

$$x_n = 0 \quad \text{para } n < 0 \quad \text{y } n > N - 1 \quad (4.27)$$

Capítulo 5

Marco Metodológico

5.1. Método y técnica de investigación

Para la ejecución de este proyecto, se llevo a cabo una investigación de carácter cuantitativo, empleando un método deductivo, limitándose al análisis de los datos obtenidos segun la hipotesis planteada.

5.2. Diseño de la investigación

El desarrollo del proyecto se realizará teniendo en cuenta las siguientes fases:

1. Deducción de las fórmulas del efecto Doppler, para cada uno de sus caso.
2. Discretización de la ecuación de onda utilizando el método de diferencias finitas.
3. Realización del código, en el lenguaje de programación de C++, que permita la simulacion del efecto Doppler
4. Aplicación de método de fronteras no reflectivas, PML.
5. Validación teórica de la simulación numérica obtenida.
6. Adicionar el parámetro dispersivo a la ecuación de onda, para la posterior simulacion del efecto Doppler en medios dispersivos.
7. Analizar el cambio de frecuencia percibida en un medio dispersivo.

Al finalizar se darán los resultados y conclusiones obtenidas según la simulación planteada.

Capítulo 6

Desarrollo del proyecto

En este capítulo se presentan las fases para llevar a cabo el desarrollo del proyecto, comenzando con la discretización de la ecuación de onda en dos dimensiones empleando el método numérico de diferencias finitas (ver Anexo D), luego se realiza el código en C++ para efectuar la simulación, con los resultados obtenidos se lleva a cabo una validación al respecto, comparando los datos que arroja la simulación y los datos resultantes al sustituir los parámetros utilizados en la simulación en la ecuación 4.1, para los casos cuando la fuente se aleja del observador en reposo, la fuente se acerca al observador en reposo, fuente y observador se acercan entre sí, por último cuando el observador se acerca a una fuente de sonido en reposo. Posteriormente, se efectúa la discretización de la ecuación 4.2, la ecuación de onda para medios dispersivos en dos dimensiones (ver Anexo E), se realiza la simulación en C++ para el posterior análisis de resultados.

6.1. Discretización de la Ecuación de Onda

Considerando la ecuación de onda para dos dimensiones, se utiliza el método de diferencias finitas para realizar la aproximación de las derivadas respectivas.

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial t^2} = v^2 \left[\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial y^2} \right] \quad (6.1)$$

Para la ecuación de onda, la ecuación 6.1 se tiene en cuenta las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$\phi(x, y, 0) = f(x, y) \quad (6.2)$$

$$\phi(0, 0, t) = \phi(l_1, l_2, t) = 0 \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \phi(x, y, 0)}{\partial x} = g(x, y) \quad (6.4)$$

para $0 < x < l_1$, $0 < y < l_2$ y $t > 0$.

La discretización se realiza utilizando diferencias centradas en ambos lados de la igualdad, en el lado izquierdo se determina la aproximación de la segunda derivada temporal, mientras que en el lado derecho se halla la aproximación de la segunda derivada en dos dimensiones, respecto a las componentes espaciales x e y (ver Anexo D). Para esto se emplean las ecuaciones 4.15, 4.16 y 4.25, obteniendo

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t + \Delta t) = \Delta t^2 \cdot v^2 & \left[\frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\phi(x, y + \Delta y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} \right] + \\ & + 2\phi(x, y, t) - \phi(x, y, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Presentando un error de truncamiento

$$E = -v^2 \left[\frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \phi(\epsilon, y, t) + \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \phi(x, \xi, y) \right] + \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \phi(x, y, \mu) \quad (6.6)$$

donde $\epsilon \in (x - \Delta x, x + \Delta x)$, $\xi \in (y - \Delta y, y + \Delta y)$ y $\mu \in (t - \Delta t, t + \Delta t)$.

6.2. Validación

En esta sección se presenta la validación del código realizado en C++, con el fin de simular algunos de los casos del efecto Doppler, utilizando para esto la discretización de la ecuación de onda empleando diferencias finitas, es decir, la ecuación 6.5.

Además de esto se hace necesario emplear en el código de programación el método de fronteras PML, para evitar la reflexión del campo de onda que surge al ejecutar la simulación, permitiendo esto obtener datos veraces para su verificación.

Ya discretizada la ecuación de onda para dos dimensiones y diseñado el código en C++ que permite la simulación del efecto Doppler y el análisis de los siguientes casos:

Caso 1: Observador en reposo y la fuente se aleja del observador.

Caso 2: Observador en reposo y la fuente se acerca al observador.

Caso 3: Observador y fuente se acercan entre sí.

Caso 4: Fuente en reposo y el observador se mueve hacia la fuente.

Para los casos 1, 2 y 3 se realizan diferentes “simulaciones” variando la velocidad de la fuente, iniciando con una velocidad de 10 m/s hasta 60 m/s , aumentando la velocidad para cada ejecución en 10 m/s . Luego de obtener los datos, se gráfica en Gnuplot la amplitud respecto al tiempo, para cada una de las diferentes velocidades, posteriormente empleando el programa Grace y con los datos obtenidos, se determina la Transformada Discreta de Fourier, permitiendo el análisis del espectro frecuencial de la señal u onda emitida por la fuente, dando la dependencia de frecuencia y amplitud.

Lo descrito anteriormente se hace también para el caso 4, en este caso la fuente permanece en reposo y la velocidad de observador es la que varia.

Para cada uno de los casos se validan los resultados obtenidos, para esto se toma el resultado de la transformada discreta de Fourier y se compara con el resultado de calcular la frecuencia percibida con la ecuación para el efecto Doppler en cada uno de sus casos. Se determina el error actual de los datos obtenidos.

La validación de modelo planteado se realiza contrarrestando los datos obtenidos al aplicar la transformada discreta de Fourier con la solución analítica de la ecuación del efecto Doppler, reemplazando cada uno de los parámetros empleados. Obteniendo una tabla de valores que permite analizar la efectividad del método y simulación empleada, mostrando el margen de error en cada uno de los casos y para cada una de las velocidades utilizadas.

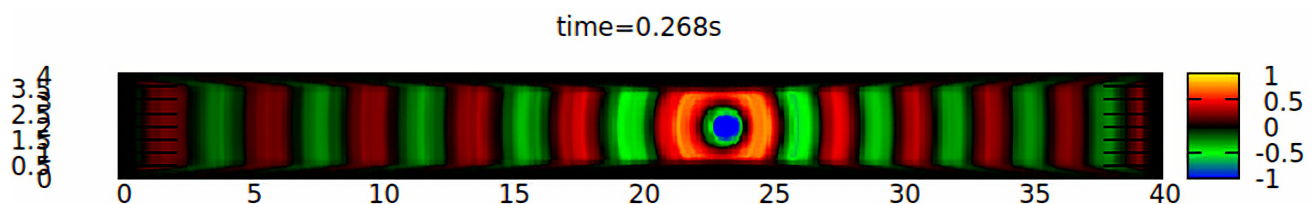


Figura 6.2.1: Pantallazo de la simulación el efecto Doppler realizada en C++

Para la programación del método se utiliza una grilla de $400\text{ m} \times 400\text{ m}$, 400 particiones para x y 400 particiones en y , se considera un $\Delta x = 0,1\text{ m}$ y un $\Delta y = 0,1\text{ m}$ también se toman dos puntos de registro para evaluar cada caso, uno de ellos esta ubicado en la partición 80 y el segundo en la partición 320; dichos puntos registran el paso de los frente de onda, para luego analizar la frecuencia, amplitud, etc. Para la simulación se asume que el medio de propagación de la onda es el aire, por lo cual se toma la velocidad del sonido en el aire como $\vec{v} = 343\text{ m/s}$, también se trabaja con una frecuencia principal de 100 Hz , frecuencia que es emitida por la fuente de sonido y que esta dentro del rango de frecuencia audible del ser humano, es decir, esta entre los 20 Hz y los

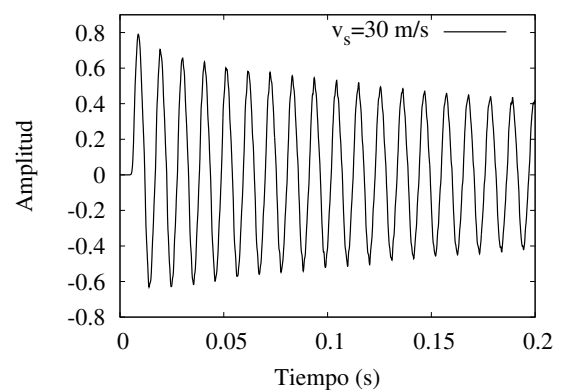
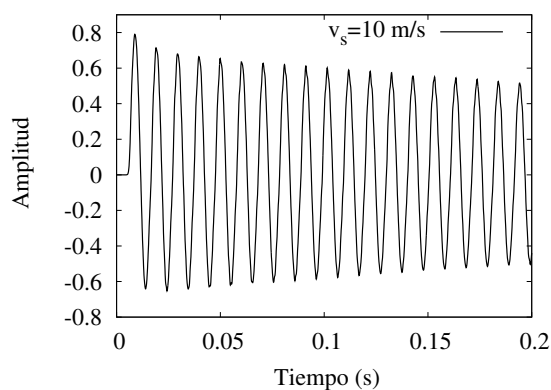
20,000 kHz. La amplitud que se toma para la onda sonora es de 4,0 m y la variación del tiempo se asume como $\Delta t = 0,0001$.

Parámetro	Cantidad
Velocidad del sonido en el medio (\vec{v})	343 m/s
Frecuencia	100 Hz
Amplitud	4

Tabla 6.2.1: Parámetros de la simulación

Caso I: Observador en reposo y fuente se aleja del observador

Dado que la fuente se encuentra en movimiento, se realizan diferentes simulaciones variando la velocidad de la fuente \vec{v}_s , la cual varía entre 10 m/s y 60 m/s, en este caso el observador está inmóvil, por lo cual, $\vec{v}_o = 0$ m/s. Para cada simulación se mantienen los parámetros expuestos en la tabla 6.2.1. En primer instancia se realizan unas gráficas, en las cuales se muestra la amplitud en función del tiempo, dichas gráficas se muestran en la figura 6.2.3, en las cuales se puede evidenciar que al aumentar el tiempo la amplitud de la onda disminuye, también existe una mayor "dispersión" una menor compresión entre los frentes de onda a medida que la velocidad de la fuente en movimiento aumenta. Esto implicaría según los referentes teóricos que la frecuencia disminuye a medida que la fuente de sonido se aleja de un observador en reposo.



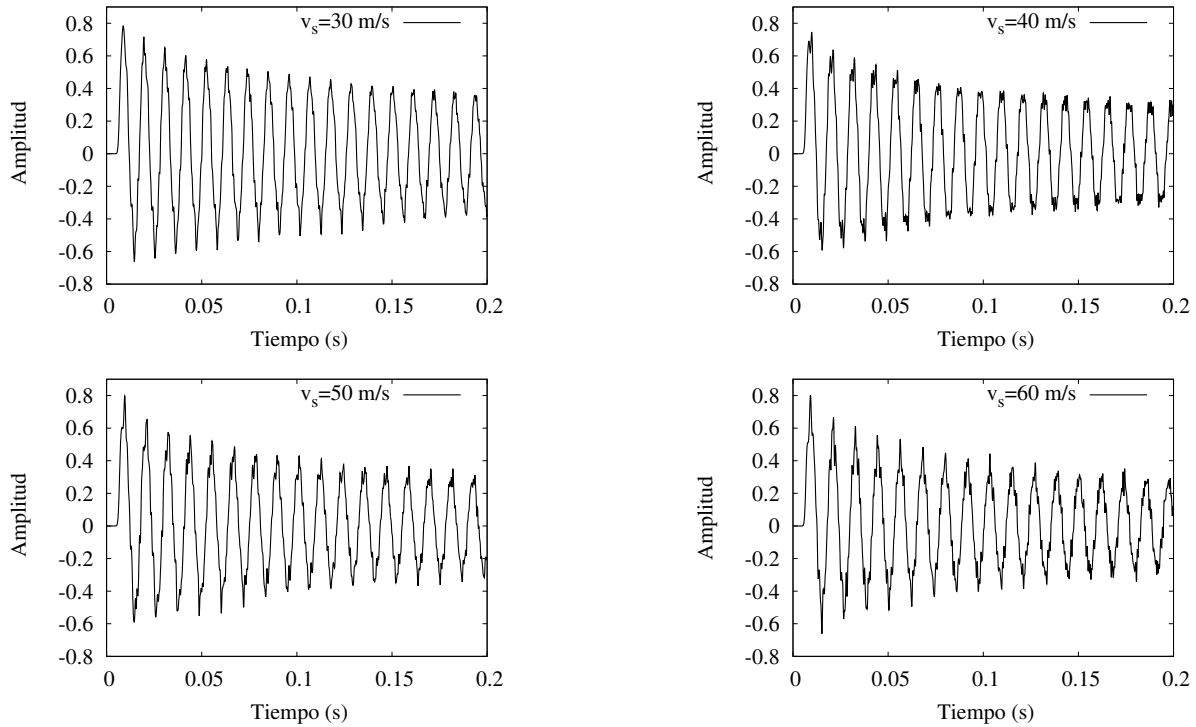


Figura 6.2.3: La fuente se aleja del observador en reposo, $\vec{v}_o = 0 \text{ m/s}$. La fuente se mueve entre velocidades de 10 m/s a 60 m/s

Para fortalecer el planteamiento anteriormente expuesto se procede a la aplicación de la transformada discreta de Fourier para los datos obtenidos, mostrando de esta manera la amplitud en función de un dominio frecuencial, permitiendo hacer una comparación entre la frecuencia principal y los demás picos de frecuencia obtenidos al realizar cada variación en la velocidad. Mostrando efectivamente la disminución de la frecuencia a medida que la fuente se aleja.

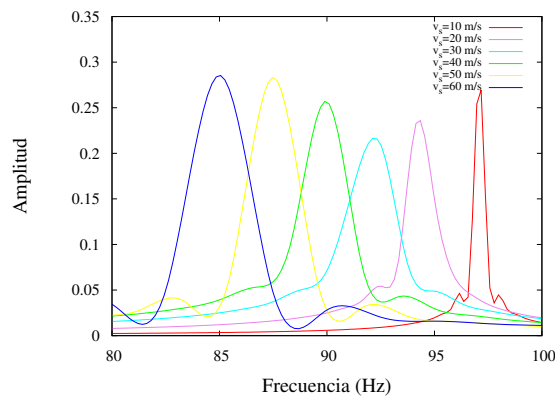


Figura 6.2.4: Transformada Discreta de Fourier para el caso cuando la fuente se aleja del observador en reposo, la fuente se mueve a diferentes velocidades y emite una señal con frecuencia de 100 Hz

Lo mostrado hasta el momento demuestra la efectividad del modelo, sin embargo, se hace necesario contrarrestarlo analíticamente. Se emplea la ecuación A.53 y se reemplazan los valores para calcular la frecuencia f_o percibida por el observador en reposo, es decir, se toma $f_s = 100 \text{ Hz}$, $\vec{v} = 343 \text{ m/s}$ y \vec{v}_s variando entre 10 m/s y 60 m/s . Dichos valores se encuentran en la tabla 6.2.2 como la frecuencia percibida f_o valor teórico, se calcula la diferencia de los valores obtenido para establecer el error de eficacia de la simulación propuesta, mostrando así que para el caso donde la fuente de sonido se aleja del observador en reposo el error no supera el 0,59%, concluyendo así que la simulación realizada funciona para el caso cuando la fuente se aleja de un observador en reposo .

Velocidad (m/s)	Frecuencia percibida f_o , según la simulación (Hz)	Frecuencia percibida f_o valor teórico (Hz)	Error (%)
10	97,0874	97,16713881	0,082063557
20	94,167	94,49035813	0,342212828
30	92,5	91,95710456	0,590379009
40	90,0	89,55613577	0,495626822
50	87,5	87,27735369	0,255102041
60	85,0	85,11166253	0,131195335

Tabla 6.2.2: Frecuencia percibida por un observador en reposo cuando la fuente se aleja, comparación entre frecuencia simulada y frecuencia teórica.

Caso II: Observador en reposo y la fuente se acerca al observador

En este caso la fuente esta en movimiento, por lo tanto se consideran diferentes velocidades para cada simulación, dicha velocidad \vec{v}_s cambia entre 10 m/s y 60 m/s , se toman los parámetros expuestos en la tabla 6.2.1, con los resultados obtenidos se realizan las gráficas correspondientes a cada simulación, planteando gráficas de la amplitud en función del tiempo, presentado una forma de onda sinusoidal con poca variación de la amplitud a través del tiempo, ver la Figura 6.2.6.

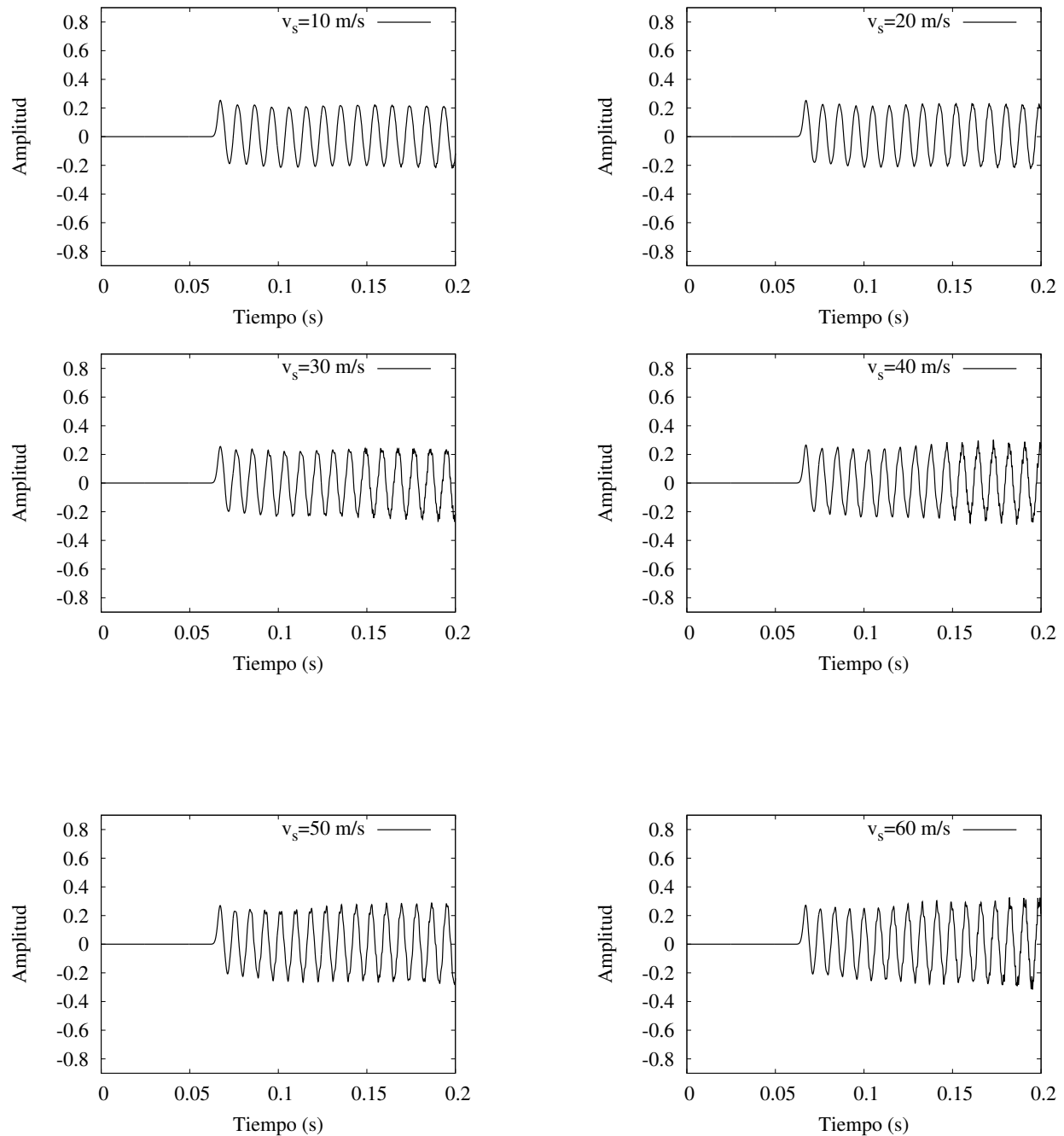


Figura 6.2.6: La fuente se acerca a un observador en reposo, $\vec{v}_o = 0$ m/s. La fuente se mueve entre velocidades de 10 m/s a 60 m/s

Posteriormente con los resultados obtenidos se procede a realizar la transformada discreta de Fourier, consiguiendo pasar del dominio tiempo al dominio frecuencial, se obtiene el espectro de frecuencias para cada simulación realizada, evidenciando un aumento de frecuencia cuando la velocidad con la que se acerca la fuente de sonido al observador también aumenta.

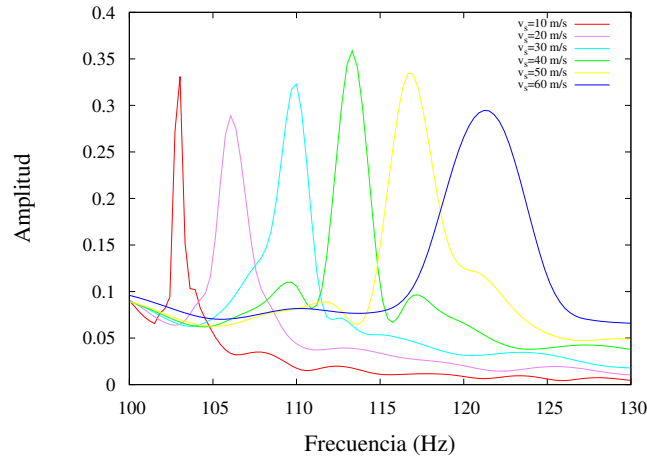


Figura 6.2.7: Transformada Discreta de Fourier para el caso cuando la fuente se acerca al observador en reposo, la fuente emite una señal con frecuencia de 100 Hz

Esto reafirma que cuando la fuente de sonido se acerca la frecuencia percibida por el observador es mayor, en la tabla 6.2.3 se muestra una comparación entre la frecuencia calculada numéricamente mediante la ecuación A.53 y la frecuencia obtenida gracias a la simulación, la diferencia obtenida es muy pequeña, estableciendo un error inferior al 0,5 %. Concluyendo así que la simulación es válida para el caso cuando la fuente se acerca a un observador en reposo.

Velocidad (m/s)	Frecuencia percibida f_o según la simulación (Hz)	Frecuencia percibida f_o valor teórico (Hz)	Error (%)
10	102,921	103,003003	0,079612245
20	105,837	106,1919505	0,334253644
30	110,0	109,5846645	0,379008746
40	113,334	113,2013201	0,117206997
50	116,669	117,0648464	0,338142857
60	121,219	121,2014134	0,014510204

Tabla 6.2.3: Frecuencia percibida por un observador en reposo y la fuente se mueve hacia él, frecuencia según la simulación y frecuencia teórica.

Caso III: Observador y fuente se acercan entre sí

En este caso se considera el movimiento tanto de fuente como observador acercándose entre sí, se realizan nuevamente seis simulaciones variando la velocidad de la fuente \vec{v}_s nuevamente entre 10 m/s y 60 m/s , la velocidad del observador se mantiene en todas las simulaciones como $\vec{v}_o =$

20 m/s, los demás parámetros a considerar son expuestos en la tabla 6.2.1. Se obtuvieron gráficas para cada simulación, presentando la amplitud en función del tiempo, dichas representaciones están en la figura 6.2.9.

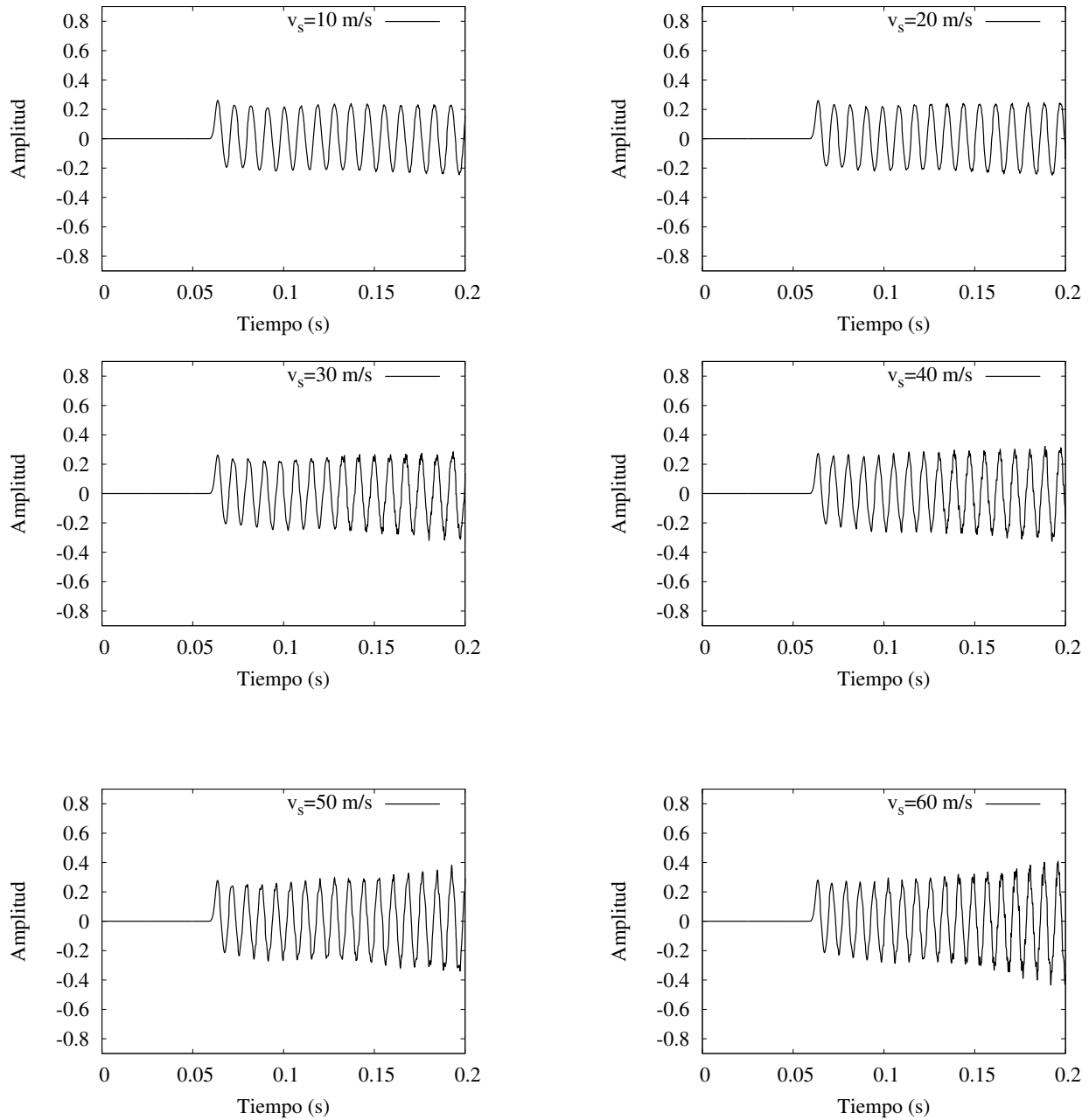


Figura 6.2.9: La fuente y el observador se acercan entre sí. El observador mantiene una velocidad de $\vec{v}_o = 20 \text{ m/s}$ y la fuente se mueve entre velocidades de 10 m/s a 60 m/s

Se aplica transformada discreta de Fourier a los datos obtenidos, consiguiendo los espectros frecuenciales para cada invariación de velocidad, evidenciando un aumento en la frecuencia a

medida que el observador y la fuente se acercan entre sí considerando diferentes velocidades en cada caso, a continuación se presenta la transformada de Fourier para el caso trabajado.

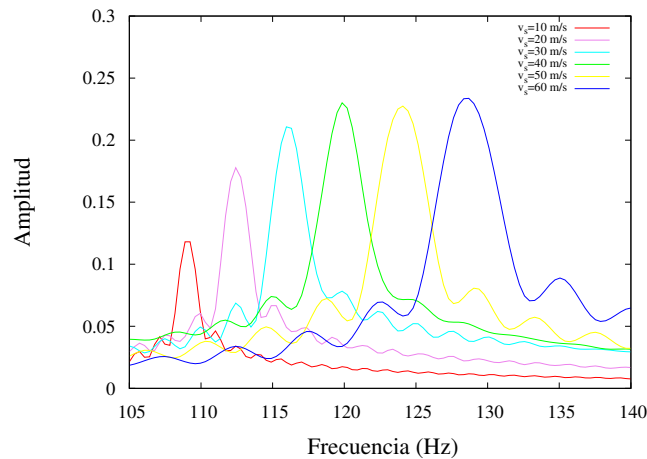


Figura 6.2.10: Transformada Discreta de Fourier para el análisis frecuencia en el caso cuando la fuente y observador se acercan entre sí, la señal emitida por la fuente tiene una frecuencia de 100 *Hz*

Velocidad (m/s)	Frecuencia percibida f_o según la simulación (Hz)	Frecuencia percibida f_o valor teórico (Hz)	Error (%)
10	108,974	109,009009	0,032115702
20	112,501	112,3839009	0,104195592
30	116,254	115,9744409	0,241052342
40	120,0	119,8019802	0,165289256
50	123,972	123,890785	0,065553719
60	128,702	128,2685512	0,337922865

Tabla 6.2.4: Frecuencia percibida simulada y teórica, para el caso cuando fuente y observador se acercan entre sí

En la tabla 6.2.4 se presentan los resultados obtenidos para la frecuencia percibida por un observador que se dirige hacia una fuente en movimiento, se presentan los datos correspondientes a la simulación y los datos obtenidos al reemplazar en la ecuación 4.1 los variables a considerar, es decir, $\vec{v}_o = 20 \text{ m/s}$, $f_s = 100 \text{ Hz}$, $\vec{v} = 343 \text{ m/s}$ y la variación de \vec{v}_s . Se puede constatar la efectividad de la simulación, ya que solo presenta un error inferior al 0,4%, estableciendo su validez para el caso cuando fuente y observador se acercan entre sí.

Caso IV: Fuente en reposo y observador se mueve hacia la fuente

En este caso a diferencia de los anteriores, la fuente permanece en reposo, por lo tanto $\vec{v}_s = 0 \text{ m/s}$, en cambio el observador se mueve hacia la fuente con una velocidad que varía entre 10 m/s y 60 m/s , las demás variables son consideradas en la tabla 6.2.1. Con las gráficas obtenidas, se puede concluir que la amplitud de la onda sonora aumenta con el paso del tiempo además de esto mantiene los frente de onda muy cerca unos de otros, ver figura F.4.5, infiriendo así que la frecuencia percibida por el observador aumenta a medida que éste se acerca a una fuente de sonido inmóvil.

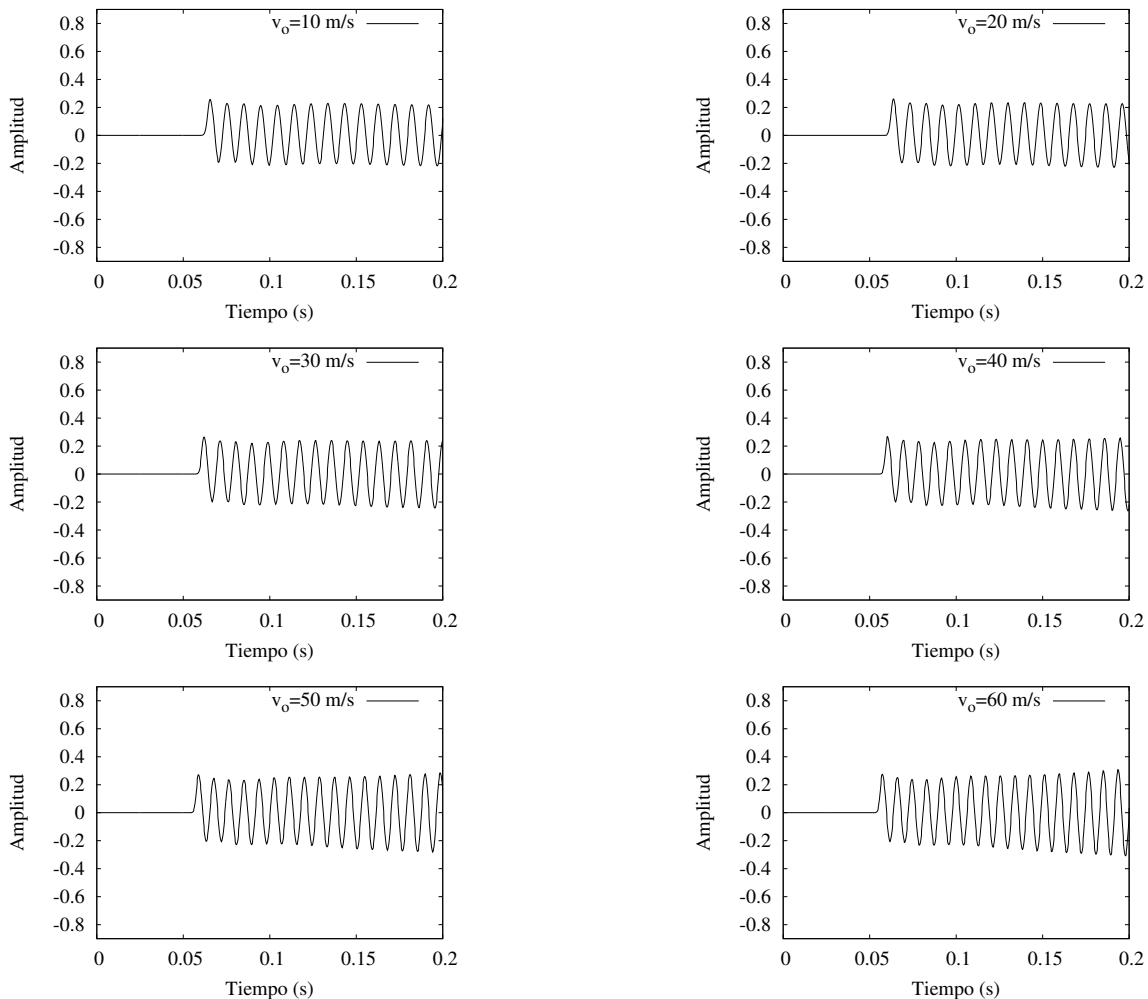


Figura 6.2.11: El observador se acerca a una fuente de sonido inmóvil, $\vec{v}_s = 0 \text{ m/s}$. La velocidad de la fuente varía entre 10 m/s y 60 m/s

Se realiza la transformada discreta de Fourier para obtener el espectro frecuencial y la frecuen-

cia percibida por el observador en movimiento para cada simulación realizada, en la Figura 6.2.12 se muestran los picos de frecuencia presentados.

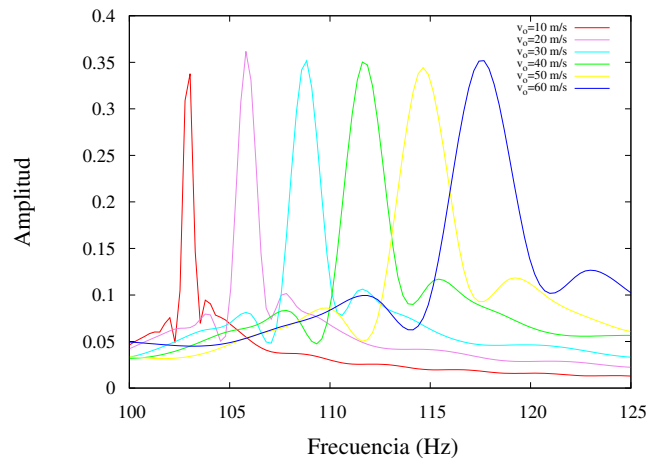


Figura 6.2.12: Transformada Discreta de Fourier para analizar el cambio de la frecuencia percibida por un observador que se mueve hacia una fuente en reposo.

En la tabla 6.2.5 se muestran los resultados obtenidos para la frecuencia percibida tanto de la simulación como de la solución numérica efectuada, presentando un error o diferencia entre ambos inferior a 0,2 %. Finalmente la simulación se hace valedera para el caso cuando observador se acerca a una fuente de sonido estacionaria.

Velocidad (m/s)	Frecuencia percibida según la simulación (Hz)	Frecuencia percibida valor teórico (Hz)	Error (%)
10	102,921	102,9154519	0,005390935
20	105,833	105,8309038	0,001980716
30	108,751	108,7463557	0,004270777
40	111,67	111,6618076	0,007336815
50	114,584	114,5772595	0,005882952
60	117,511	117,4927114	0,015565757

Tabla 6.2.5: Frecuencia simulada y frecuencia teórica para el caso cuando el observador se mueve hacia una fuente en reposo

6.3. Discretización de la ecuación de onda para medios dispersivos

Considerando la ecuación de onda para medios dispersivos

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} + \chi \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} - v^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

La discretización se realiza utilizando diferencias centradas para dos dimensiones, en la aproximación para la segunda derivada, ya sea para variables de carácter temporal o espacial, es decir, 4.15, 4.16 y 4.25. Para la discretización de la primera derivada temporal, se emplean diferencias regresivas, ecuación 4.22, ya que esto permite de manera efectiva hallar la solución del sistema.

Es de importancia resaltar que la ecuación de onda se trabaja en dos dimensiones, por lo cual es necesario, incorporar el componente espacial y , por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial t^2} + \chi \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} - \gamma \left(\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \\ - v^2 \left(\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Al realizar las aproximaciones correspondientes a cada uno de los términos de la ecuación anterior (ver Anexo E), se obtuvo la siguiente discretización, despejando el término $\phi(x, y, t + \Delta t)$,

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t + \Delta t) = (\Delta t^2 v^2 + \gamma \Delta t) \left[\frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\phi(x, y + \Delta y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} \right] - \gamma \Delta t \cdot \\ \left[\frac{\phi(x + \Delta x, y, t - \Delta t) - 2\phi(x, y, t - \Delta t) + \phi(x - \Delta x, y, t - \Delta t)}{\Delta x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\phi(x, y + \Delta y, t - \Delta t) - 2\phi(x, y, t - \Delta t) + \phi(x, y - \Delta y, t - \Delta t)}{\Delta y^2} \right] - \\ - (\chi \Delta t - 2)\phi(x, y, t) + (\chi \Delta t - 1)\phi(x, y, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Teniendo en cuenta el error de truncamiento de cada uno de los términos de la ecuación 6.3 al realizar la discretización, se obtiene un error general

$$\begin{aligned}
 E = & -\frac{v^2 \Delta t^2}{12} \left(\Delta x^2 \frac{\partial^4 \phi(\epsilon, y, t)}{\partial x^4} + \Delta y^2 \frac{\partial^4 \phi(x, \xi, t)}{\partial y^4} \right) - \frac{\chi \Delta t^3}{2} \frac{\partial^2 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^2} - \\
 & -\frac{\gamma \Delta x^2 \Delta t}{12} \left(\frac{\partial^4 \phi(\epsilon_1, y, t)}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \phi(\epsilon_2, y, t)}{\partial x^4} \right) + \frac{\gamma \Delta t^3}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^2} \right) - \frac{\gamma \Delta y^2 \Delta t}{12} \left(\frac{\partial^4 \phi(x, \xi_1, t)}{\partial y^4} - \frac{\partial^4 \phi(x, \xi_2, t)}{\partial y^4} \right) + \\
 & + \frac{\Delta t^4}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^4}
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

para algún $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2 \in (x - \Delta x, x + \Delta x)$, $\xi, \xi_1, \xi_2 \in (y - \Delta y, y + \Delta y)$ y $\mu \in (t - \Delta t, t + \Delta t)$

Capítulo 7

Resultados

Teniendo la discretización de la ecuación 6.7, se realiza la simulación para los casos del efecto Doppler, tomando como base el código en C++ desarrollado para la validación. Para cada caso la velocidad de la fuente \vec{v}_s y observador \vec{v}_o varía entre 10 m/s y 60 m/s , respectivamente. Los parámetros empleados en la simulación fueron los siguientes:

Parámetro	Cantidad
Velocidad del sonido \vec{v} (m/s)	343
Atenuación por difusión γ ($N \cdot \frac{s}{m^2}$)	$1,8 \times 10^{-5}$
Atenuación por viscosidad χ (Hz)	0-10
Frecuencia (Hz)	100
Amplitud	4
Tiempo Δt (s)	0,0001

Tabla 7.0.1: Parámetros empleados para la simulación en medios dispersivos

Cabe resaltar que el parámetro de atenuación por viscosidad γ en el aire se mantiene invariante en la simulación para cada uno de los casos, ya que es una cantidad estipulada físicamente. El parámetro de atenuación por difusión χ , el cual indica la pérdida de energía dado que la onda se propaga en todas direcciones, mantiene variaciones entre 0 Hz y 10 Hz , como se puede ver en la tabla 7.0.2, la velocidad de la fuente \vec{v}_s y la velocidad del observador \vec{v}_o varían entre 10 m/s y 60 m/s dependiendo el caso.

Coefficiente de atenuación por difusión χ (Hz)	Valores
χ_0	0
χ_1	2,5
χ_2	5
χ_3	7,5
χ_4	10

Tabla 7.0.2: Valores para el coeficiente de atenuación por difusión

A continuación se muestran los espectros de frecuencias obtenidos para cada uno de los casos, aplicando la transformada discreta de Fourier, para cada conjunto de datos resultantes de la simulación, variando la velocidad del observador y fuente en movimiento según el caso a desarrollar, también se cambió el parámetro de atenuación por difusión. La transformada discreta de Fourier se saca tomando los datos obtenidos y procesándolos en XmGrace, un programa que permite graficar datos para su posterior análisis. En el Anexo F se encuentran las gráficas de la amplitud en función del tiempo, para cada uno de los casos y las velocidades respectivas.

7.1. Caso I: Observador en reposo y la fuente se aleja

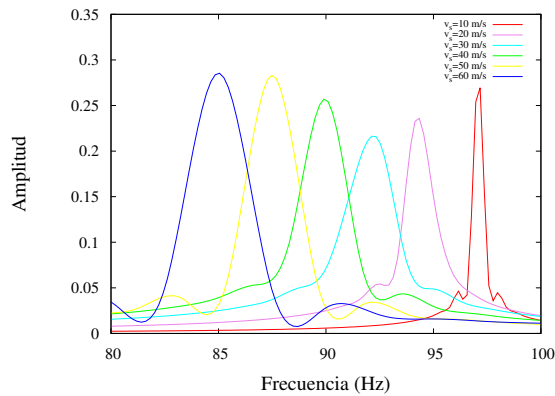
En este caso la fuente se aleja del observador en reposo con diferentes velocidades que oscilan entre los 10 m/s y 60 m/s , los parámetros para la simulación son los mencionados en la tabla 7.0.1 y el coeficiente de atenuación por difusión cambia entre 0 Hz y 10 Hz . Inicialmente se obtuvieron gráficas de la amplitud en función del tiempo, para cada uno de los valores del coeficiente de atenuación por difusión teniendo en cuenta una velocidad diferente, en total resultaron 24 gráficas, las cuales se encuentran en el Anexo F.

Cuando el coeficiente de atenuación por difusión es $\chi = 0 Hz$ la onda sonora alcanza una amplitud β , que inicialmente alcanza valores $-0,6 < \beta < 0,8$ con una velocidad de 10 m/s , la amplitud disminuye con el paso del tiempo, hasta alcanzar valores entre $-0,57 < \beta < 0,5$. En el caso cuando la velocidad es de 60 m/s la amplitud se reduce hasta valores entre $-0,3 < \beta < 0,25$ y los frentes de onda se alejan en cuanto mayor es la velocidad de la fuente en movimiento. Cuando el coeficiente de atenuación por difusión alcanza valores de 10 Hz la amplitud disminuye a medida que pasa el tiempo y se reduce más rápidamente cuando la velocidad es mayor.

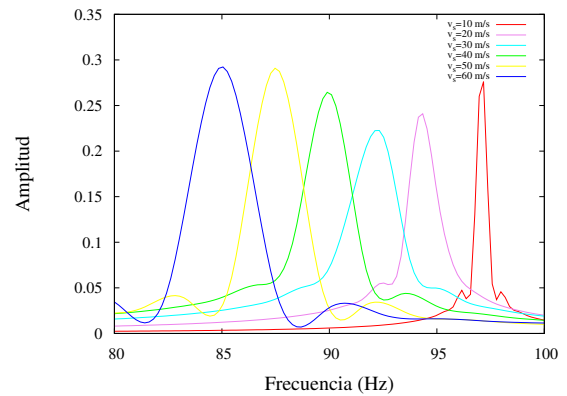
Esto implicaría que a velocidades bajas la frecuencia que percibe el observador en reposo es mucho menor en comparación a velocidades superiores, sin embargo, al presentarse una dismi-

nución en la amplitud de la onda sonora, se manifiesta pérdida de energía, dado que el medio es dispersivo y por ende, el observador percibirá un frecuencia baja a medida que la fuente en movimiento se aleja.

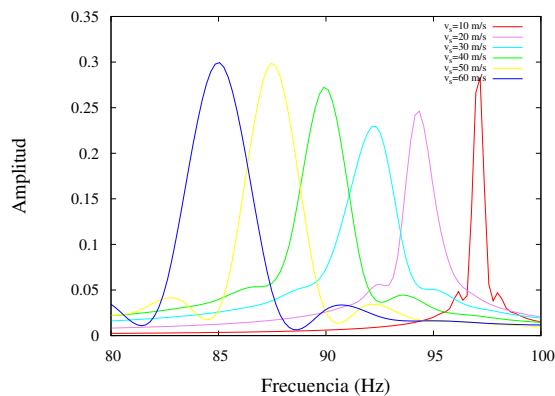
En el espectro frecuencial de la onda sonora se puede observar un corrimiento de las frecuencias con relación a la frecuencia característica de 100 Hz , dichas frecuencias disminuyen a medida que la velocidad aumenta, como se puede ver en la figura 7.1.2, presentado un corrimiento a bajas frecuencias.



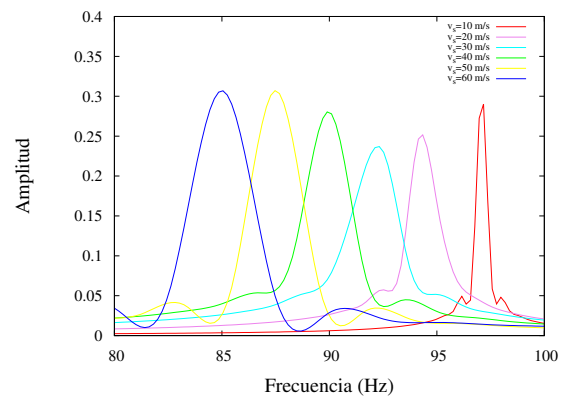
(a) $\chi = 0\text{ Hz}$



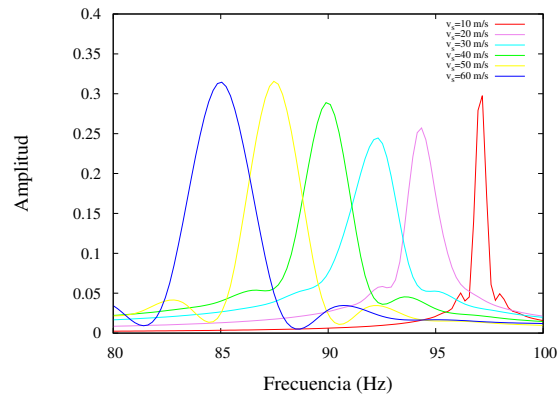
(b) $\chi = 2,5\text{ Hz}$



(c) $\chi = 5\text{ Hz}$



(d) $\chi = 7,5\text{ Hz}$



(a) $\chi = 10 \text{ Hz}$

Figura 7.1.2: Espectro de frecuencias cuando una fuente en movimiento se aleja de un observador en reposo.

Como se puede evidenciar en las gráficas anteriores, la onda alcanza una mayor amplitud cuanto mayor es la velocidad, además a medida que el coeficiente de atenuación aumenta la amplitud con relación al pico de mayor frecuencia también aumenta. En el caso $\chi = 0 \text{ Hz}$ la amplitud β varía entre $0,2076 < \beta < 0,2820$, con $\chi = 2,5 \text{ Hz}$ la amplitud varía entre $0,2147 < \beta < 0,2905$, para $\chi = 5 \text{ Hz}$ la amplitud varía $0,2221 < \beta < 0,2980$, con $\chi = 7,5 \text{ Hz}$ la amplitud posee valores entre $0,2296 < \beta < 0,3051$ y por último para $\chi = 10 \text{ Hz}$ la amplitud varía entre $0,2373 < \beta < 0,3137$. De este modo, el coeficiente de atenuación por difusión afecta en los cambios de amplitud presentados por la onda sonora, presentado una relación de proporcionalidad directa entre el coeficiente de atenuación por difusión y la amplitud, ya que la amplitud aumenta a medida que aumenta este coeficiente.

Velocidad (m/s)	$\chi = 0 \text{ Hz}$	$\chi = 2,5 \text{ Hz}$	$\chi = 5 \text{ Hz}$	$\chi = 7,5 \text{ Hz}$	$\chi = 10 \text{ Hz}$
10	97,1048	97,109	97,1134	97,1161	97,1185
20	94,1853	94,1928	94,2029	94,2173	94,2202
30	92,5351	92,5339	92,5424	92,5499	92,5449
40	90,0281	90,0125	90,0236	90,03	90,048
50	87,5211	87,5242	87,5422	87,5442	87,5524
60	85,0458	85,036	85,0422	85,0432	85,0562

Tabla 7.1.1: Valores de la frecuencia en el caso cuando la fuente se aleja del observador en reposo

El espectro de frecuencias muestra un corrimiento a bajas frecuencias respecto a la frecuencia característica tomada en la simulación 100 Hz , este corrimiento se puede evidenciar en la tabla 7.1.1. Se pueden observar dos situaciones, la primera es que a medida que el coeficiente de

atenuación por difusión aumenta para una velocidad determinada la frecuencia percibida por el observador también aumenta permaneciendo por debajo de 100 Hz , presentando una variación baja. Por otro lado, para cualquier valor de χ al incrementar la velocidad con la que se aleja la fuente, la frecuencia percibida por el observador disminuye, es decir, que a medida que la fuente se aleja con mayor velocidad el observador percibe una frecuencia cada vez menor. La frecuencia percibida f_o cuando $\chi = 0 \text{ Hz}$ toma valores entre $85,0458 < f_o < 97,1048$, para $\chi = 2,5 \text{ Hz}$ entre $85,036 < f_o < 97,109$, con $\chi = 5 \text{ Hz}$ valores entre $85,0422 < f_o < 97,1134$, para $\chi = 7,5 \text{ Hz}$ entre $85,0432 < f_o < 97,1161$ y por último para $\chi = 10 \text{ Hz}$ varía entre $85,0562 < f_o < 97,1185$; la variación de los intervalos de frecuencia percibida cambian muy poco debido al medio de propagación de la onda.

Al comparar los datos de la tabla 6.2.2 y la tabla 7.1.1 los valores de la frecuencia que escucha el observador aumentan, es decir, la frecuencia que percibe es mayor en medios dispersivos y menor en medios no dispersivos, sin embargo, mantiene el mismo comportamiento, a medida que la velocidad de la fuente aumenta la frecuencia que percibe el observador disminuye.

7.2. Caso II: Observador en reposo y la fuente se acerca al observador

En el caso cuando la fuente en movimiento se acerca a un observador en reposo, se utilizan los parámetros expuestos en la tabla 7.0.1 para su simulación, variando de igual modo la velocidad de la fuente de sonido entre valores de $10 \text{ m/s} - 60 \text{ m/s}$, también se varía el coeficiente de atenuación por difusión entre 0 Hz y 10 Hz , las gráficas de amplitud en función del tiempo se pueden ver en el Anexo F.2, se obtuvieron gráficas para cada uno de los coeficientes de atenuación por difusión utilizados para cada velocidad respectiva.

Al considerar $\chi = 0 \text{ Hz}$ y una velocidad de 10 m/s la amplitud permanece invariante con el paso del tiempo tomando valores entre $-0,2 < \beta < 0,2$, hasta que la fuente toma una velocidad mayor a 30 m/s se evidencia un cambio leve en la amplitud al transcurrir el tiempo, con $v_s = 60 \text{ m/s}$ la amplitud toma valores inicialmente entre $-0,2 < \beta < 0,2$ y alcanza valores entre $-0,3 < \beta < 0,3$. El intervalo de variación de la amplitud aumenta conforme el coeficiente de atenuación por difusión y la velocidad de la fuente aumentan, cuando $\chi = 10 \text{ Hz}$ y la velocidad de la fuente es de $v_s = 10 \text{ m/s}$ la amplitud toma valores entre $-0,23 < \beta < 0,23$ sin variar con el paso del tiempo, al tomar una velocidad $v_s = 60 \text{ m/s}$ la amplitud toma valores iniciales entre $-0,24 < \beta < 0,24$ y logra valores entre $-0,4 < \beta < 0,4$. Lo anterior implica que la amplitud aumenta con el paso del tiempo y toma una mayor variación a velocidades altas, además

el intervalo de variación de la amplitud es más grande a medida que incrementa el coeficiente de atenuación por difusión. El aumento de la amplitud implicaría que la frecuencia percibida por el observador es mayor a medida que la fuente de sonido se acerca a éste, la frecuencia es mayor cuanto más rápido se acerque la fuente al observador en reposo.

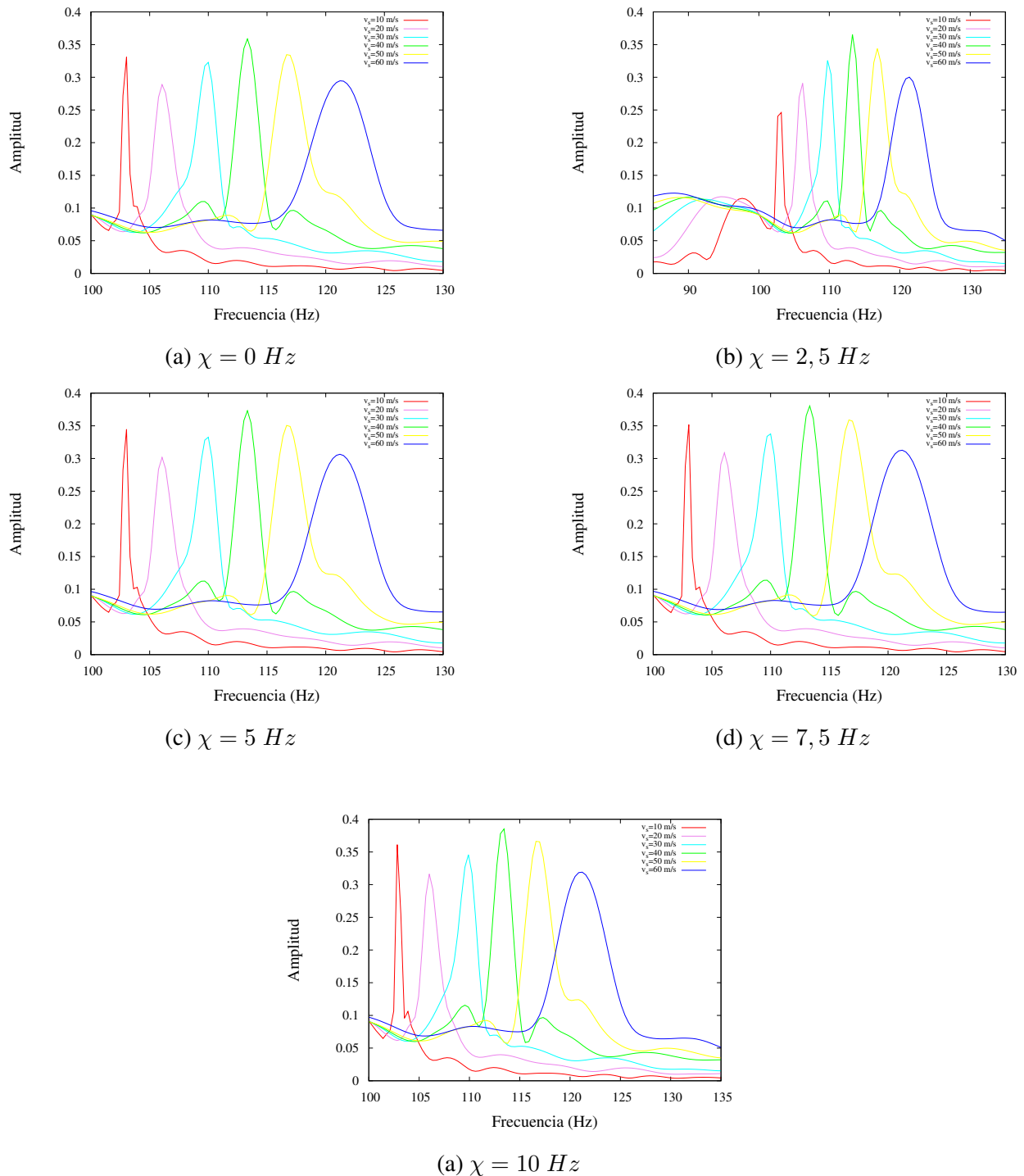


Figura 7.2.2: Espectro de frecuencias figura cuando la fuente se acerca un observador en reposo.

En el espectro de frecuencias en la figura 7.2.2, se puede evidenciar un corrimiento hacia altas frecuencias respecto a la frecuencia característica de la simulación 100 Hz , la frecuencia es mayor cuanto más rápido se acerca la fuente al observador en reposo. Para cada coeficiente de atenuación por difusión la amplitud con relación a los picos más altos de las frecuencias tiene cierta variación, presentando una reducción de la amplitud a medida que la frecuencia aumenta, que la velocidad aumenta. En el caso cuando $\chi = 0\text{ Hz}$ la amplitud obtiene valores entre $0,2647 < \beta < 0,3524$ siendo el más bajo para $v_s = 60\text{ m/s}$, para $\chi = 5\text{ Hz}$ la amplitud varía entre $0,2731 < \beta < 0,3674$, con $\chi = 7,5\text{ Hz}$ toma valores entre $0,2761 < \beta < 0,3762$ por último para $\chi = 10\text{ Hz}$ la amplitud varía entre $0,2803 < \beta < 0,3855$, lo anterior implica que a medida que el coeficiente de atenuación por difusión aumenta el intervalo de variación de la amplitud se hace más grande, donde para los picos de frecuencia más alto se presenta una menor amplitud. Si el coeficiente de atenuación por difusión y la velocidad de la fuente aumentan, el pico de frecuencia más alto para cada caso muestra una disminución en la amplitud de la onda.

Velocidad (m/s)	$\chi = 0\text{ Hz}$	$\chi = 2,5\text{ Hz}$	$\chi = 5\text{ Hz}$	$\chi = 7,5\text{ Hz}$	$\chi = 10\text{ Hz}$
10	102,961	102,944	102,948	102,967	102,993
20	105,87	105,858	105,884	105,911	105,916
30	110,046	110,043	110,049	110,051	110,069
40	113,365	113,363	113,386	113,412	113,43
50	116,722	116,723	116,868	116,718	116,736
60	120,078	120,083	120,086	120,072	120,097

Tabla 7.2.1: Valores de la frecuencia percibida por un observador en reposo cuando una fuente se acerca.

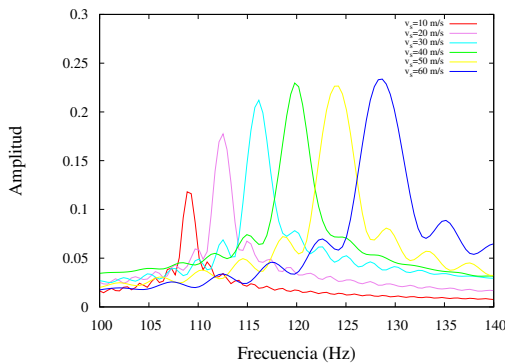
En la tabla 7.2.1 se muestra el valor de la frecuencia percibida por un observador en reposo cuando una fuente de sonido se acerca, considerando diferentes velocidades y distintos valores para el coeficiente de atenuación por difusión. Para $\chi = 0\text{ Hz}$ la frecuencia f_o toma valores entre $102,961 < f_o < 120,078$, cuando $\chi = 2,5\text{ Hz}$ la frecuencia varía entre $102,944 < f_o < 120,083$, para $\chi = 5\text{ Hz}$ valores $102,948 < f_o < 120,086$, cuando $\chi = 7,5\text{ Hz}$ toma valores $102,967 < f_o < 120,072$ y por último cuando $\chi = 10\text{ Hz}$ la frecuencia varía entre $102,993 < f_o < 120,097$. Se puede analizar que cuando la fuente mantiene una velocidad constante la frecuencia que el observador percibe aumenta, así sea muy poco, a medida que el coeficiente de atenuación por difusión aumenta. Por otro lado, para cualquier valor del coeficiente de atenuación, al incrementar la velocidad la frecuencia aumenta, esto debido a que cuando más rápido la fuente se acerque al observador, los frente de onda estarán cada vez más juntos.

Al revisar los resultados obtenidos en la tabla 6.2.3 y en la tabla 7.2.1, la frecuencia percibida en un medio no dispersivo respecto a un medio dispersivo es menor, presentando una variación baja de un medio a otro. Sin embargo, conservan un mismo comportamiento pues al aumentar la velocidad la frecuencia que el observador percibe también aumenta.

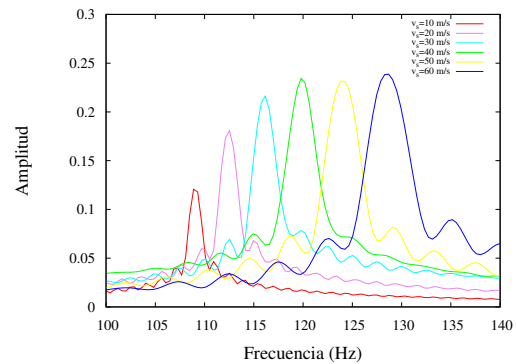
7.3. Caso III: Observador y fuente se acercan entre sí

En este caso la fuente de sonido y el observador se encuentran en movimiento, se acercan entre sí. Para la fuente se toman velocidades entre 10 m/s y 60 m/s mientras que el observador mantiene una velocidad $v_o = 20 \text{ m/s}$, las gráficas de la variación de la amplitud en función del tiempo se encuentran en el Anexo F.3, estas gráficas se muestran para cada uno de los valores del coeficiente de atenuación por difusión evaluando las seis velocidades diferentes.

Cuando $\chi = 0 \text{ Hz}$ la amplitud tiene una variación muy leve al paso del tiempo, se presenta un incremento en la amplitud de la onda a partir de $t = 0,05 \text{ s}$, si $v_s = 10 \text{ m/s}$ la amplitud toma valores iniciales entre $-0,2 < \beta < 0,2$ hasta tomar valores entre $-0,22 < \beta < 0,22$, al considerar $v_s = 60 \text{ m/s}$ la amplitud inicia entre $-0,2 < \beta < 0,2$ hasta lograr valores entre $-0,4 < \beta < 0,4$, para el caso cuando $\chi = 10 \text{ Hz}$ la amplitud para una velocidad $v_s = 10 \text{ m/s}$ toma inicialmente valores $-0,23 < \beta < 0,23$ hasta $-0,28 < \beta < 0,28$, al considerar $v_s = 60 \text{ m/s}$ la amplitud toma valores entre $-0,28 < \beta < 0,28$ y alcanza valores entre $-0,5 < \beta < 0,45$. Para cualquier valor del coeficiente de atenuación por difusión χ la amplitud aumenta con el paso del tiempo y se observa un cambio más notorio al incrementar la velocidad, además si el coeficiente de atenuación por difusión aumenta el intervalo de la variación de la amplitud también se hace más grande. En general, existe un aumento de la amplitud a medida que la fuente y el observador se acercan entre sí, provocando que el observador perciba una frecuencia alta a medida que se acercan mutuamente fuente y observador.



(a) $\chi = 0 \text{ Hz}$



(b) $\chi = 2,5 \text{ Hz}$

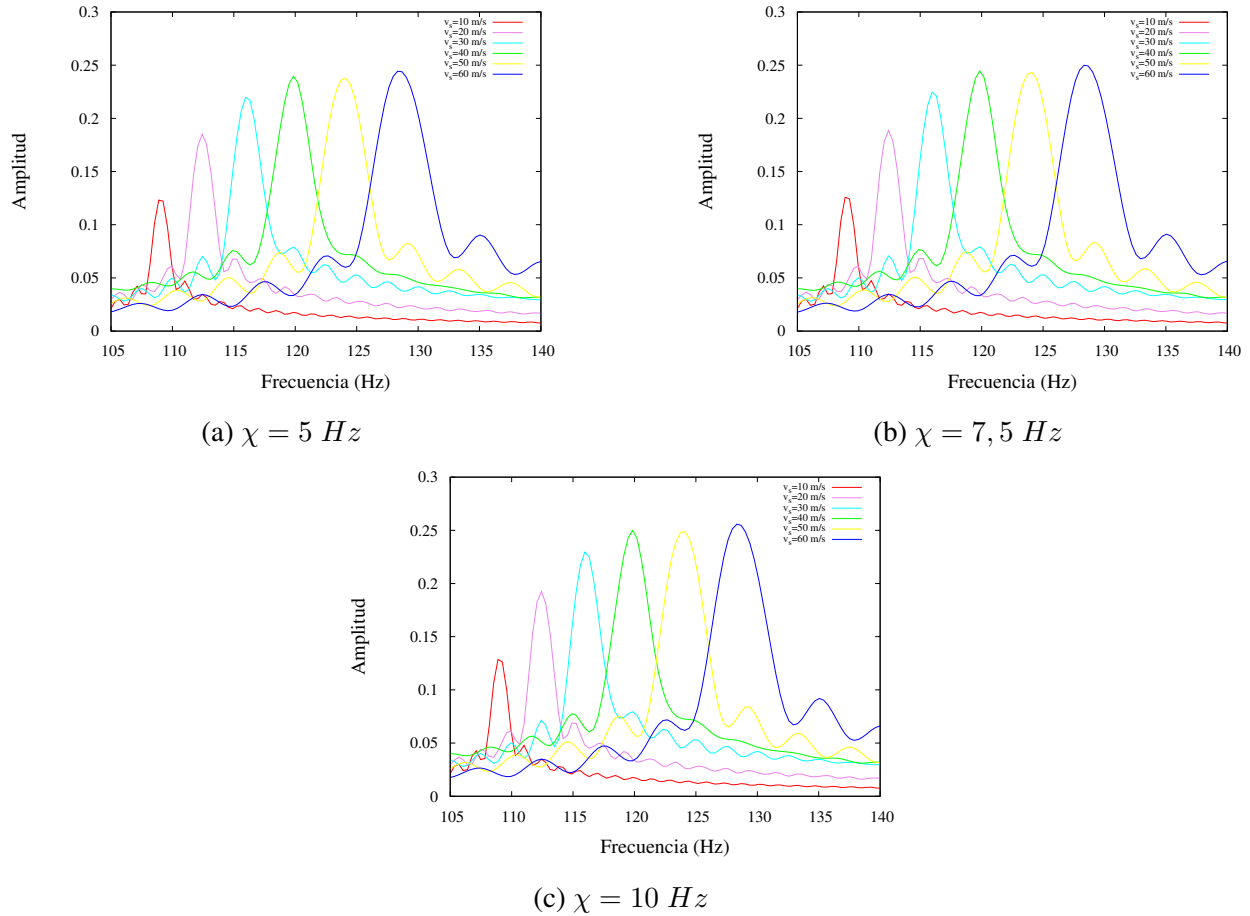


Figura 7.3.2: Espectro de frecuencias cuando el observador y la fuente se acercan entre sí.

En el espectro de frecuencias de la figura 7.3.2 se puede evidenciar un aumento progresivo de la frecuencia percibida al variar tanto velocidades y coeficiente de atenuación por difusión, es decir, que a medida que fuente y observador se acercan entre sí se presenta un corrimiento a altas frecuencias respecto a la frecuencia característica de 100 Hz tomada para la simulación. Para cada uno de los espectro de la frecuencia se tomaron los picos más altos de está, presentando un aumento en la amplitud a medida que la velocidad aumenta, en el caso de $\chi = 0 \text{ Hz}$ la amplitud varía entre $0,1190 < \beta < 0,2127$ y cuando $\chi = 10 \text{ Hz}$ la amplitud toma valores entre $0,1276 < \beta < 0,2347$. Lo anterior muestra que al aumentar el coeficiente de atenuación por difusión el intervalo de variación de la amplitud es mayor, mostrando un aumento con relación a la velocidad de la fuente de sonido y el observador.

En la tabla 7.3.1 se muestra el valor de la frecuencia que percibe el observador cuando fuente y observador se acercan entre sí, se puede analizar que para una determinada velocidad la frecuencia aumenta a medida que el coeficiente de atenuación por difusión aumenta. La frecuencia percibida f_o tiene variaciones al incrementar la velocidad, presentando un aumento en la misma, cuando

$\chi = 0 \text{ Hz}$ la frecuencia toma valores entre $109,174 < f_o < 127,539$, para $\chi = 2,5 \text{ Hz}$ valores entre $109,219 < f_o < 127,543$, con $\chi = 5 \text{ Hz}$ valores $109,246 < f_o < 127,575$, para $\chi = 7,5 \text{ Hz}$ valores $109,253 < f_o < 127,59$ y por último para $\chi = 10 \text{ Hz}$ la frecuencia percibida varía entre $109,262 < f_o < 127,608$, se evidencia un aumento en el intervalo de variación de la frecuencia a medida que el coeficiente de atenuación por difusión aumenta ya además se observa que la frecuencia aumenta con respecto a la frecuencia característica de los 100 Hz .

Velocidad (m/s)	$\chi = 0 \text{ Hz}$	$\chi = 2,5 \text{ Hz}$	$\chi = 5 \text{ Hz}$	$\chi = 7,5 \text{ Hz}$	$\chi = 10 \text{ Hz}$
10	109,174	109,219	109,246	109,253	109,262
20	112,525	112,532	112,556	112,592	112,604
30	116,23	116,276	116,309	116,312	116,34
40	120,024	120,056	120,062	120,091	120,11
50	122,965	122,973	122,996	122,991	123,03
60	127,539	127,543	127,575	127,59	127,608

Tabla 7.3.1: Frecuencia percibida por el observador cuando fuente y observador se acercan entre sí.

Al analizar los resultados obtenidos en la tabla 6.2.4 cuando el medio no es dispersivo y la tabla 7.3.1 cuando el medio es dispersivo, la frecuencia presenta un aumento en este último medio con relación al primero, manteniendo un mismo comportamiento, es decir, que la frecuencia que percibe el observador es mayor a medida que fuente y observador se acercan entre sí, siendo mayor al incrementar la velocidad.

7.4. Caso IV: Fuente en reposo y el observador se acerca hacia la fuente

En este caso a diferencia de los anteriores la fuente de sonido permanece inmóvil mientras que el observador se acerca variando su velocidad entre 10 m/s y 60 m/s , se obtuvieron gráficas de la amplitud en función del tiempo, dichas gráficas se pueden ver en el Anexo F.4.

En el caso de $\chi = 0 \text{ Hz}$ la variación de la amplitud es muy poca para cualquier velocidad, oscilando entre valores entre $-0,2 < \beta < 0,2$ para $v_o = 10 \text{ m/s}$ y para $v_o = 60 \text{ m/s}$ inicialmente toma valores entre $-0,2 < \beta < 0,2$ hasta alcanzar valores entre $-0,3 < \beta < 0,3$, cuando $\chi = 10 \text{ Hz}$ la amplitud para una velocidad $v_o = 10 \text{ m/s}$ varía entre valores $-0,25 < \beta < 0,25$ y cuando $v_o = 60 \text{ m/s}$ toma valores iniciales entre $-0,25 < \beta < 0,25$ hasta lograr valores entre $-0,38 < \beta < 0,38$, se puede considerar que la amplitud de la onda aumenta a medida que

pasa el tiempo, se ve afectada por la velocidad del observador y por el aumento del coeficiente de atenuación por difusión.

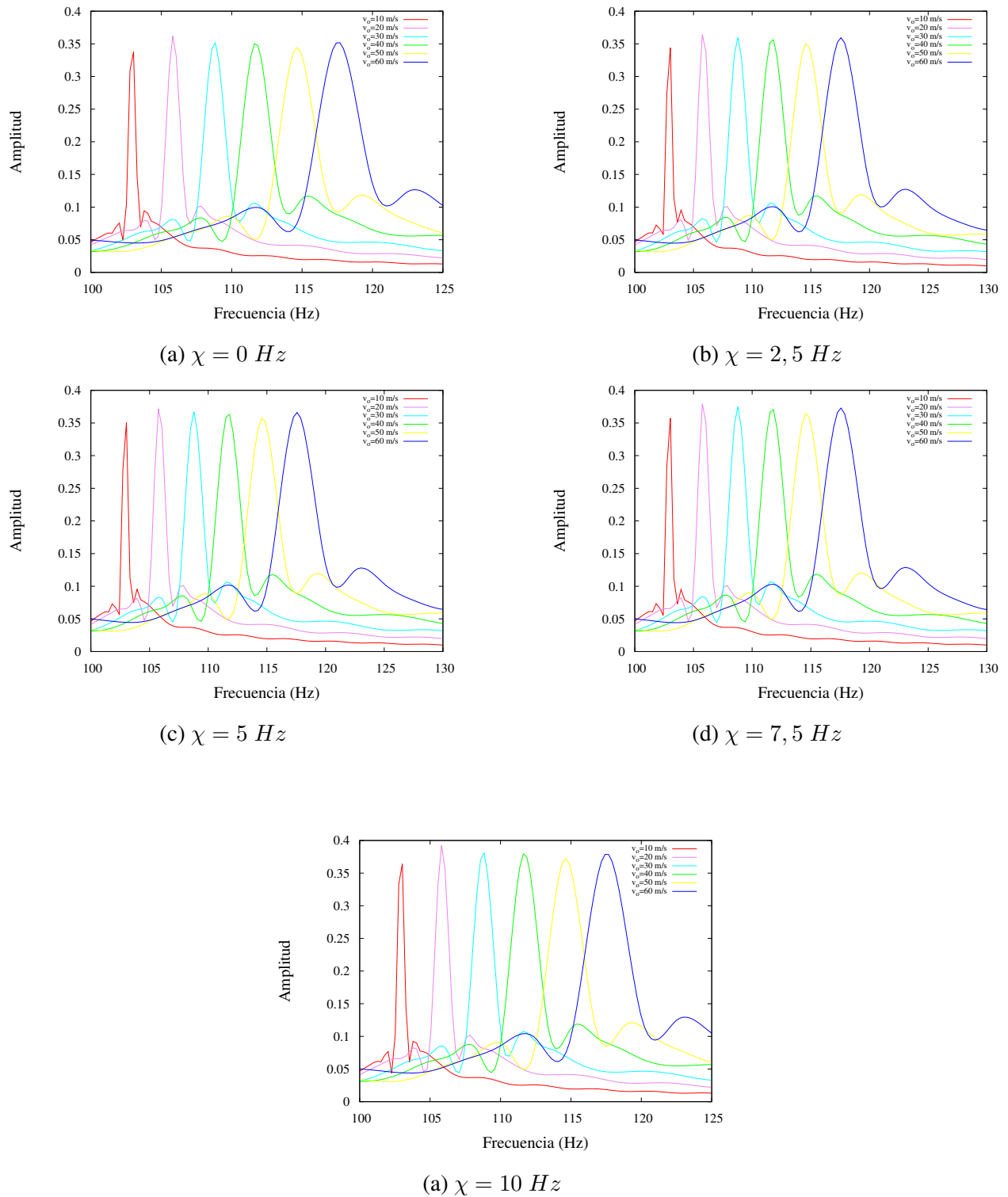


Figura 7.4.2: Espectro de frecuencias cuando el observador se acerca a una fuente en reposo.

En el espectro de frecuencias, figura 7.4.2, se muestran los resultados de la frecuencia que percibe un observador cuando se acerca a una fuente de sonido en reposo, se puede observar que para cualquier valor del coeficiente de atenuación por difusión la amplitud no sufre grandes variaciones para el conjunto de velocidades evaluadas, tomando valores entre $0,33 < \beta < 0,38$. Se observa un corrimiento hacia altas frecuencias respecto a al frecuencia característica de 100 Hz a medida que aumenta la velocidad. En la tabla 7.4.1 se muestra el valor de la frecuencia percibida por un observador que se acerca a una fuente en reposo, cuando $\chi = 0 \text{ Hz}$ la frecuencia f_o aumenta tomando valores entre $102,95 < f_o < 117,517$, para $\chi = 2,5 \text{ Hz}$ toma valores entre $102,953 < f_o < 117,523$, con $\chi = 5 \text{ Hz}$ la frecuencia aumenta entre $102,952 < f_o < 117,531$, para $\chi = 7,5 \text{ Hz}$ valores entre $120,962 < f_o < 117,53$ y por último para $\chi = 10 \text{ Hz}$ la frecuencia que percibe el observador aumenta tomando valores entre $102,971 < f_o < 117,57$, el aumento del coeficiente de atenuación por difusión implica un aumento en el intervalo de la variación de la frecuencia, dicha frecuencia aumenta a medida que incrementa la velocidad del observador. Por otro lado, si se considera una velocidad particular la frecuencia aumenta muy poco a medida que aumenta el coeficiente de atenuación por difusión.

Velocidad (m/s)	$\chi = 0 \text{ Hz}$	$\chi = 2,5 \text{ Hz}$	$\chi = 5 \text{ Hz}$	$\chi = 7,5 \text{ Hz}$	$\chi = 10 \text{ Hz}$
10	102,95	102,953	102,952	102,962	102,971
20	105,861	105,876	105,875	105,869	105,896
30	108,772	108,799	108,778	108,798	108,976
40	111,683	111,699	111,703	111,705	111,721
50	114,606	114,622	114,627	114,634	114,645
60	117,517	117,523	117,531	117,563	117,57

Tabla 7.4.1: Frecuencia percibida por un observador que se acerca a una fuente en reposo.

Los resultados obtenidos en un medios no dispersivo, revisar tabla 6.2.5, muestran también un aumento de la frecuencia cuando aumenta el coeficiente de atenuación por difusión y la velocidad del observador, esto sucede de igual modo en un medio dispersivo, tal como se puede evidenciar el la tabla 7.4.2, aunque en este último los valores son un poco mayores.

Capítulo 8

Conclusiones

- El cambio de frecuencia en el medio dispersivo, no fue tan notorio porque se tomo como medio el aire, por lo cual la variación de la frecuencia ajustando los parámetros de atenuación es muy baja.
- La discretización de la ecuación de onda mediante diferencias finitas regresivas y centradas, permite modelar de manera efectiva el efecto Doppler, presentando un error real inferior al 1 %, comparando los resultados obtenidos en la simulación como los encontrados analíticamente..
- En un medio dispersivo cuando la fuente de sonido se aleja del observador en reposo, se presenta un corrimiento hacia bajas frecuencias respecto a la frecuencia característica a medida que la velocidad aumenta, esto implica que el observador percibirá una frecuencia menor a medida que la fuente se aleja incrementando su velocidad.
- Cuando la fuente se aleja del observador en reposo, a medida que aumenta el coeficiente de atenuación por difusión y la velocidad, la amplitud de la onda disminuye, esto da lugar para que la frecuencia que percibe el observador sea menor cuanto más rápido se aleja la fuente en movimiento.
- El coeficiente de atenuación por difusión en un medio dispersivo, hace que la frecuencia que percibe un observador en reposo sea un poco mayor a la que presenta en un medio no dispersivo, sin embargo, en ambos medios se presenta el mismo comportamiento, es decir, que a medida que la fuente se aleja la frecuencia que percibe el observador en menor, mostrando una mayor disminución a velocidades altas.
- En un medio dispersivo cuando la fuente se acerca a un observador en reposo, se experimenta un cambio de amplitud con el paso del tiempo, presentado a su vez un aumento en

la frecuencia percibida por el observador, dicho aumento es más notorio a medida que el coeficiente de atenuación por difusión y la velocidad aumentan.

- En un medio dispersivo cuando la fuente se acerca a un observador en reposo, en el espectro de frecuencias se evidencia un corrimiento hacia altas frecuencias con relación a la frecuencia característica de 100 Hz llegando a tomar valores de $120,097 \text{ Hz}$ para valores de velocidad y coeficiente de atenuación por difusión altos.
- En un medio no dispersivo y en uno dispersivo, cuando la fuente se acerca a un observador en reposo, la frecuencia que percibe el observador es más alta a medida que la fuente se mueve rápidamente hacia este.
- En un medio dispersivo cuando fuente y observador se acercan entre sí, la amplitud de la onda aumenta, presentado una variación más notoria cuando aumenta la velocidad, además el intervalo de variación de la amplitud es más grande a medida que aumenta el coeficiente de atenuación por difusión.
- En el espectro de frecuencias cuando fuente y observador se acercan entre sí, se presenta un corrimiento hacia altas frecuencias respecto a la frecuencia específica de 100 Hz , llegando a tomar valores entre $109,174 \text{ Hz}$ y $127,608 \text{ Hz}$, dependiendo del valor para el coeficiente de atenuación por difusión, ya que este a medida que aumenta hace que el intervalo de la frecuencia percibida por el observador sea mayor.
- Tanto en medios dispersivos como en medios no dispersivos, a medida que la fuente y observador se acercan entre sí, la frecuencia percibida por el observador es mayor, aunque cabe resaltar que en medios dispersivos la frecuencia manifiesta una variación un poco mayor.
- En un medio dispersivo cuando el observador se acerca a una fuente de sonido inmóvil, la onda presenta un aumento de la amplitud cuanto mayor es el coeficiente de atenuación por y la velocidad, por lo cual el observador percibe una mayor frecuencia a medida que se acerca, mostrando un mayor agrupamiento de los frente de onda.
- El espectro de frecuencias cuando el observador se acerca a una fuente en reposo, muestra un corrimiento hacia altas frecuencias respecto a la frecuencia característica de 100 Hz , tomando valores entre $102,95 \text{ Hz}$ y $117,17 \text{ Hz}$, los cuales incrementa a medida que la velocidad y el coeficiente de atenuación aumentan.
- En un medios dispersivo y en uno no dispersivo, la frecuencia que percibe un observador aumenta a medida que éste se acerca a la fuente de sonido inmóvil, tomando inicialmente valores muy cercanos a la frecuencia característica.

- El efecto Doppler en medios dispersivos, tiene una pequeña variación en la frecuencia percibida por un observador, un pequeño incremento en relación a lo presentado en un medio no dispersivo, dicha variación se evidencia cuando una fuente de sonido se aleja o acerca a un observador en reposo, cuando fuente y observador se acercan entre sí, por último cuando el observador se acerca a una fuente en reposo.

Capítulo 9

Recomendaciones

- Para próximos estudios tener en cuenta otro medio de propagación y considerar velocidades más altas, para tener resultados más precisos en el espectro de frecuencias de cada caso del efecto Doppler.
- Desarrollar el proyecto empleando otro método numérico para la simulación, para lograr evaluar la efectividad de los resultados obtenidos con el método de diferencias finitas y compararlos con los resultados que arroje otro método.
- Utilizar otro lenguaje de programación que permite un desarrollo más sencillo y eficaz para la modelación de los casos del efecto Doppler en medios dispersivos.

Bibliografía

- Berenger, J.-p. (1994). A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. *Journal Of Computational Physics*, 200:185–200.
- Berger, H. (1976). Complex Doppler effect in dispersive media. *American Journal of Physics*, 44(9):851–854.
- Boyce, D. (1998). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Limusa.
- Capra, F. (2014). *Il Tao della fisica*. Adelphi Edizioni spa.
- Carrillo Ledesma, A., Mendoza Bernal, O., and González Rosas, K. I. (2018). Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional. Technical report.
- Censor, D. (1992). Real and Complex Doppler Effects in Lossy Media. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*.
- Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R., and Resheq, M. (1985). discrete acoustic and elastic wave equations. *Geophysics Journal*, 50(4):705–708.
- Cuadrado, E. (2013). *Práctica ciencia: Ondas. Medios Dispersivos*.
- Doppler, C. (1842). *Ueber das Farbige Licht*. Praga.
- Duitama, A. (2013). *Simulación de la Atenuación de Frecuencias en Ondas Sísmicas Primarias*. Tesis de maestría, UNiversidad Nacional de Colombia.
- Giancoli, D. (2008). *Física para Ciencia e Ingeniería*. México, cuarta edition.
- Heisenberg, W. (2008). *Física e filosofía*, volume 53. Il saggiatore.
- Korneev, V. A., Goloshubin, G. M., Daley, T. M., and Silin, D. B. (2004). Seismic low-frequency effects in monitoring fluid-saturated reservoirs. *Geophysics*, 69(2):522–532.
- Radmanesh, M. M. (2007). *RF & microwave design essentials : engineering design and analysis from DC to microwaves*. Bloomington, Indiana, primera edition.

- Ruiz, A. G., J. C. A. V., Alfredo, L., and Vides, M. (2006). Método híbrido de fronteras no reflectivas en límites de modelos sísmicos. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 30(115):209–214.
- Russell, D. (2011). *Waves in a Dispersive Medium*.
- Samiullah, M. (2015). *A first course in vibrations and waves*. New York, primera edición.
- Serway, R. A. (2008). *Physics for Scientists and Engineers*. México, séptima edición.
- Sorokin, Y. M. (1993). Doppler effect and aberrational effects in dispersive medium. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 36(7):410–422.
- Usagawa, T., Matsuno, K., Ebata, M., and Okda, J. (1985). Analysis of a moving sound source by the cross-spectral technique- A method for reducing frequency shift by for reducing the Doppler effect. *Journal of the Acoustical Society of Japan*, 4:281–288.
- Zhang, Y. O., Zhang, T., Ouyang, H., and Li, T. Y. (2015). SPH Simulation of Acoustic Waves: Effects of Frequency, Sound Pressure, and Particle Spacing. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015:1–7.

Anexo A

Deducción de las ecuaciones del efecto Doppler

En esta sección se presenta la deducción paso a paso de las ecuaciones para cada uno de los casos del efecto Doppler, dicho fenómeno estudia el cambio de frecuencia aparente de una onda, dicha vibración es producida por el movimiento relativo entre fuente y observador.

En la vida cotidiana se puede observar la presencia del efecto Doppler, por ejemplo, el sonido producido por una ambulancia, la frecuencia que percibe un observador cuando la ambulancia se acerca es más alta que la frecuencia que escucha cuando se aleja la ambulancia.

El objetivo de esta sección es deducir las ecuaciones para cada caso del efecto Doppler, permitiendo establecer la relación entre la frecuencia percibida, la frecuencia emitida y la velocidad de fuente y observador, con respecto a la velocidad del medio de propagación de la onda.

Antes de comenzar se tendrá en cuenta que si v es la velocidad de propagación de la onda, λ es la longitud de onda y f es la frecuencia, entonces tenemos que

$$f = \frac{v}{\lambda} \quad (\text{A.1})$$

De lo cual se deduce que

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad (\text{A.2})$$

Estableciéndose que la frecuencia tiene una relación inversa con el concepto de longitud de onda, a mayor frecuencia menor longitud de onda y viceversa. Cuando las ondas viajan de un medio a otro, por ejemplo, de aire a agua, la frecuencia de la onda se mantiene constante, cambiando la longitud de onda y la velocidad.

A.1. Fuente y Observador en reposo

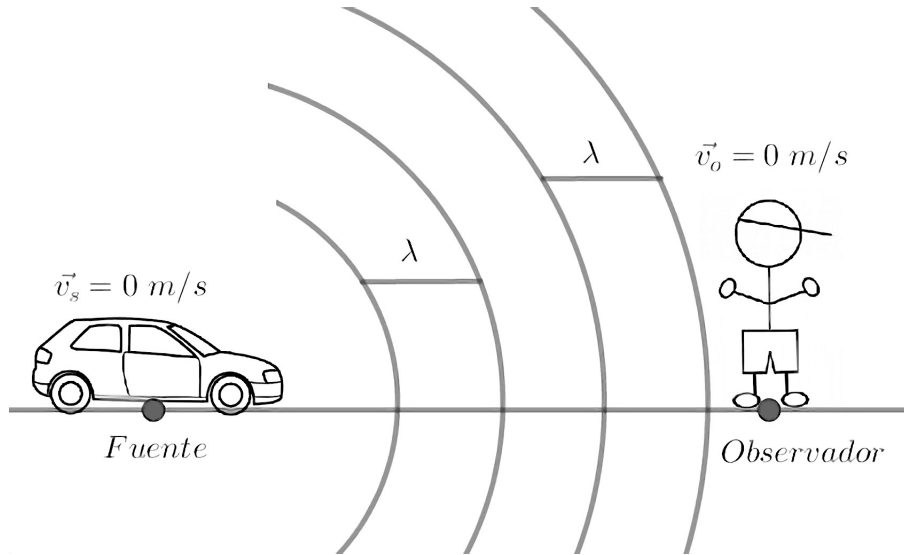


Figura A.1.1: Fuente y observador en reposo.

La fuente emite frentes de onda esféricas a una frecuencia f_s , como fuente y observador están en reposo, sus velocidades son nulas, es decir, $\vec{v}_s = 0$ y $\vec{v}_o = 0$, siendo \vec{v}_s la velocidad de la fuente y \vec{v}_o la velocidad del observador. Por lo tanto, la frecuencia observada, f_o , es igual a la frecuencia de la fuente f_s .

$$f_o = f_s \quad (\text{A.3})$$

A.2. Fuente en reposo y observador en movimiento

Si la fuente está en reposo, la onda viaja a la rapidez del sonido en el medio, generalmente el aire, \vec{v} , la cual es independiente a la velocidad de la fuente o el observador.

Con una fuente fija y un observador en movimiento, la distancia entre cada cresta de onda, permanece invariante, entonces los frentes de onda estarán siempre a una misma distancia. Pero, la velocidad de la onda, con respecto al observador cambia, siendo ésta una velocidad relativa.

A.2.1. El observador se mueve hacia la fuente

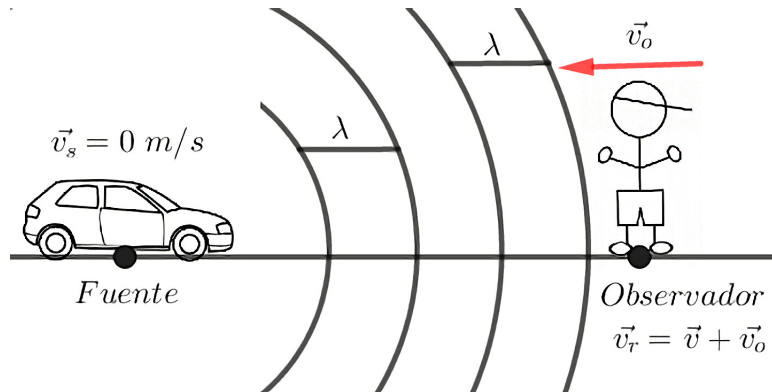


Figura A.2.1: El observador se acerca a una fuente de sonido en reposo.

Si el observador se dirige a la fuente, el tono escuchado es más alto que el emitido por la fuente, luego la frecuencia será mayor.

La fuente emite una onda sonora con una frecuencia f_s por la expresión A.2 se tiene

$$\lambda = \frac{\vec{v}}{f_s} \quad (\text{A.4})$$

Si el observador se mueve hacia la fuente, con una velocidad \vec{v}_o . La velocidad relativa \vec{v}_r de las ondas con respecto al observador es:

$$\vec{v}_r = \vec{v} + \vec{v}_o \quad (\text{A.5})$$

La frecuencia escuchada según la ecuación A.1 es:

$$f_o = \frac{\vec{v}_r}{\lambda} \quad (\text{A.6})$$

Reemplazando la expresión A.5 en A.6

$$f_o = \frac{\vec{v} + \vec{v}_o}{\lambda} \quad (\text{A.7})$$

Ahora, sustituimos la ecuación A.4 en A.7

$$f_o = \frac{\vec{v} + \vec{v}_o}{\frac{\vec{v}}{f_s}} \quad (\text{A.8})$$

Quedando

$$f_o = \left(\frac{\vec{v} + \vec{v}_o}{\vec{v}} \right) f_s \quad (\text{A.9})$$

La frecuencia percibida por el observador es más alta que la frecuencia de la fuente, porque la velocidad relativa del observador y de la onda es mayor que la velocidad \vec{v} de la onda (FUENTE).

A.2.2. El observador se aleja de la fuente

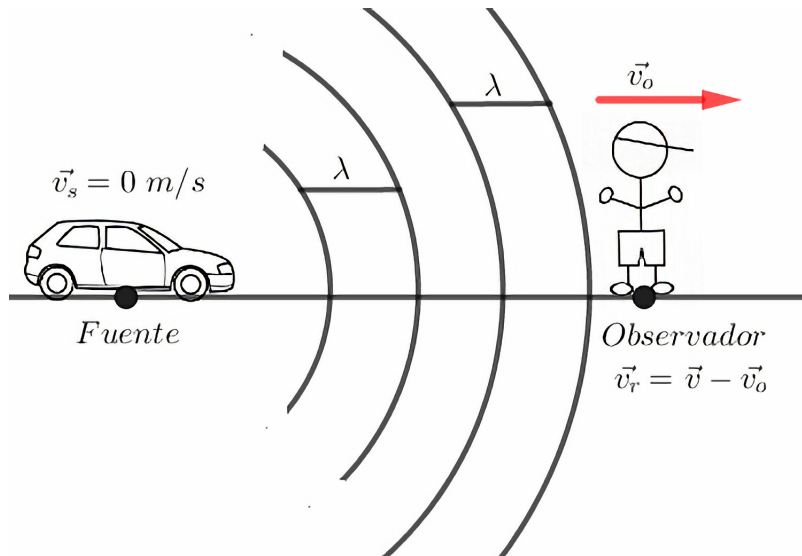


Figura A.2.2: El observador se aleja de la fuente en reposo.

La velocidad relativa en este caso, esta dada por:

$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_o \quad (\text{A.10})$$

De acuerdo a la expresión A.1 la frecuencia observada es:

$$f_o = \frac{\vec{v}_r}{\lambda} \quad (\text{A.11})$$

Al sustituir la ecuación A.10 en A.11, se tiene

$$f_o = \frac{\vec{v} - \vec{v}_o}{\lambda} \quad (\text{A.12})$$

Teniendo en cuenta la ecuación A.4, reemplazamos

$$f_o = \frac{\vec{v} - \vec{v}_o}{\frac{\vec{v}}{f_s}} \quad (\text{A.13})$$

Así, la frecuencia percibida por el observador cuando se aleja de la fuente esta dada por

$$f_o = \left(\frac{\vec{v} - \vec{v}_o}{\vec{v}} \right) f_s \quad (\text{A.14})$$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en A.9 y A.14, la frecuencia cuando el observador esta en movimiento es:

$$f_o = \left(\frac{\vec{v} \pm \vec{v}_o}{\vec{v}} \right) f_s \quad (\text{A.15})$$

A.3. Observador en reposo y fuente en movimiento

Cuando la fuente se mueve hacia el observador, los frentes de onda cambian, luego la longitud de onda entre ellos también se modifica.

A.3.1. La fuente se mueve hacia el observador

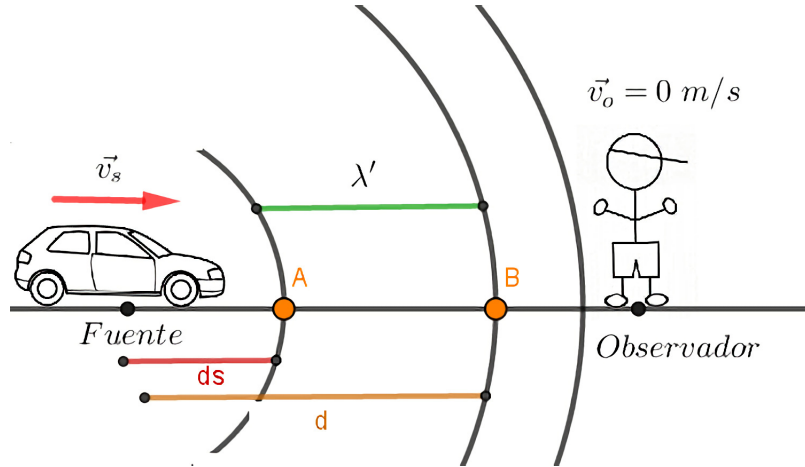


Figura A.3.1: El observador en reposo y la fuente de sonido se acerca a éste.

Sea \vec{v}_s la velocidad con la cual la fuente se acerca al observador, teniendo en cuenta que por el movimiento rectilíneo uniforme, se tiene:

$$\vec{v} = \frac{\Delta x}{t} \quad (\text{A.16})$$

Sea d la distancia que se ha movido la primer cresta de la onda, así

$$d = T \cdot \vec{v} \quad (\text{A.17})$$

Donde:

- T : tiempo de emisión entre crestas (Período).
- \vec{v} : velocidad de la onda sonora en el aire.

Dicha distancia d es igual por definición, a la longitud de onda en ese instante, luego

$$d = T \cdot \vec{v} = \lambda \quad (\text{A.18})$$

Por otro lado, considerando la expresión A.16, la fuente se ha desplazado una distancia d_s respecto al punto de partida, luego :

$$d_s = T \cdot \vec{v}_s \quad (\text{A.19})$$

Así, la distancia percibida por el observador, viene dada por:

$$\lambda' = d - d_s \quad (\text{A.20})$$

Reemplazando la expresiones A.18 y A.19 en A.20

$$\lambda' = \lambda - T \cdot \vec{v}_s$$

Teniendo en cuenta que en el movimiento ondulatorio, el periodo T es inverso a la frecuencia f , es decir,

$$T = \frac{1}{f} \quad (\text{A.21})$$

Considerando la ecuación A.1, se tiene

$$T = \frac{\lambda}{\vec{v}} \quad (\text{A.22})$$

Reemplazando el resultado obtenido en la ecuación A.3.1

$$\lambda' = \lambda - \frac{\lambda}{\vec{v}} \cdot \vec{v}_s \quad (\text{A.23})$$

Factorizando λ de la ecuación A.23, se tiene

$$\lambda' = \lambda \left(1 - \frac{\vec{v}_s}{\vec{v}} \right) \quad (\text{A.24})$$

Reescribiendo

$$\lambda' = \lambda \left(\frac{\vec{v} - \vec{v}_s}{\vec{v}} \right) \quad (\text{A.25})$$

Considerando la ecuación A.2, la ecuación A.25 quedaría

$$\lambda' = \frac{\vec{v}}{f_s} \left(\frac{\vec{v} - \vec{v}_s}{\vec{v}} \right) \quad (\text{A.26})$$

Quedando finalmente

$$\lambda' = \frac{\vec{v} - \vec{v}_s}{f_s} \quad (\text{A.27})$$

Así la frecuencia que percibe el observador, f_o , esta dada según la expresión A.1 por:

$$f_o = \frac{\vec{v}}{\lambda'} \quad (\text{A.28})$$

Sustituyendo la ecuación A.27 en A.28

$$f_o = \frac{\vec{v}}{\frac{\vec{v} - \vec{v}_s}{f_s}} \quad (\text{A.29})$$

Quedando

$$f_o = \left(\frac{\vec{v}}{\vec{v} - \vec{v}_s} \right) f_s \quad (\text{A.30})$$

Como $\vec{v} > \vec{v} - \vec{v}_s$, entonces $f_o > f_s$, lo que implica que la frecuencia observada es mayor que la frecuencia emitida por la fuente, cuando la fuente se acerca al observador en reposo.

A.3.2. La fuente se aleja del observador en reposo

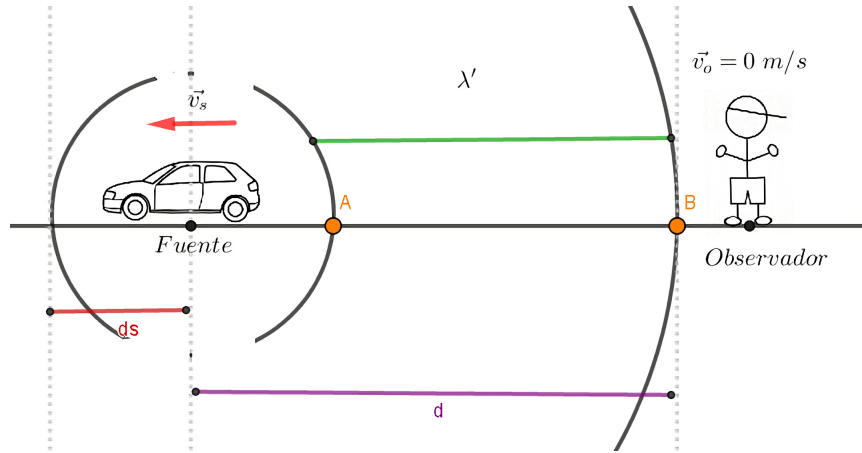


Figura A.3.2: Fuente de sonido se aleja del observador en reposo

La rapidez de la fuente es \vec{v}_s , en este caso la longitud de onda, λ' , que percibe el observador tendrá un signo negativo en d_s , ya que la fuente se aleja en dirección opuesta al observador

$$\lambda' = d - (-d_s) \quad (\text{A.31})$$

Así,

$$\lambda' = d + d_s \quad (\text{A.32})$$

Teniendo en cuenta las expresiones A.18 y A.19, se reemplaza en la ecuación A.32

$$\lambda' = \lambda + \vec{T} \cdot \vec{v}_s \quad (\text{A.33})$$

Considerando la ecuación A.22, se tiene:

$$\lambda' = \lambda + \lambda \frac{\vec{v}_s}{\vec{v}} \quad (\text{A.34})$$

Factorizando λ en A.34

$$\lambda' = \lambda \left(1 + \frac{\vec{v}_s}{\vec{v}} \right) \quad (\text{A.35})$$

Reescribiendo:

$$\lambda' = \lambda \left(\frac{\vec{v} + \vec{v}_s}{\vec{v}} \right) \quad (\text{A.36})$$

Luego, la frecuencia de onda percibida por el observador, f_o , según la expresión A.1 es:

$$f_o = \frac{\vec{v}}{\lambda'} \quad (\text{A.37})$$

Sustituyendo A.36 en A.37

$$f_o = \frac{\vec{v}}{\lambda \left(\frac{\vec{v} + \vec{v}_s}{\vec{v}} \right)} \quad (\text{A.38})$$

Teniendo en cuenta A.2

$$f_o = \frac{\vec{v}}{\frac{\vec{v}}{f_s} \left(\frac{\vec{v} + \vec{v}_s}{\vec{v}} \right)} \quad (\text{A.39})$$

Simplificando

$$f_o = \frac{\vec{v}}{\frac{\vec{v} + \vec{v}_s}{f_s}} \quad (\text{A.40})$$

Finalmente,

$$f_o = \left(\frac{\vec{v}}{\vec{v} + \vec{v}_s} \right) f_s \quad (\text{A.41})$$

Apreciando A.35, se tiene que

$$\frac{\vec{v}}{\vec{v} + \vec{v}_s} = 1 + \frac{\vec{v}_s}{\vec{v}} > 1 \quad (\text{A.42})$$

entonces $f_o < f_s$.

Infiriendo de manera general, que la frecuencia cuando la fuente se mueve, esta dada conforme a A.30 y A.41, por:

$$f_o = \frac{\vec{v}}{\vec{v} \mp \vec{v}_s} \quad (\text{A.43})$$

A.4. Fuente y observador en movimiento

A.4.1. Fuente y observador se acercan entre sí

Cuando la fuente y observador se acercan uno al otro con una velocidad \vec{v}_s y \vec{v}_o , respectivamente. La velocidad relativa del observador con relación a la onda es:

$$\vec{v}_r = \vec{v} + \vec{v}_o \quad (\text{A.44})$$

La longitud de onda percibida por el observador es:

$$\lambda' = \frac{\vec{v} - \vec{v}_s}{f_s} \quad (\text{A.45})$$

Teniendo presente la ecuación A.1, se sustituyen A.44 y A.45

$$f_o = \frac{\vec{v}_r}{\lambda'} \quad (\text{A.46})$$

Quedando,

$$f_o = \frac{\vec{v} + \vec{v}_o}{\frac{\vec{v} - \vec{v}_s}{f_s}} \quad (\text{A.47})$$

Finalmente,

$$f_o = \left(\frac{\vec{v} + \vec{v}_o}{\vec{v} - \vec{v}_s} \right) f_s \quad (\text{A.48})$$

Suponiendo que $\vec{v} - \vec{v}_s < \vec{v} + \vec{v}_o$, entonces $f_o > f_s$. Por tanto, la frecuencia percibida aumenta cuando la fuente y el observador se acercan entre sí.

A.4.2. Fuente y Observador se alejan entre sí

Si fuente y observador se alejan uno del otro con una velocidad \vec{v}_s y \vec{v}_o , respectivamente. La velocidad relativa del observador con relación a la onda es:

$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_o \quad (\text{A.49})$$

La longitud de onda percibida, tal como se analizó en el apartado anterior es:

$$\lambda' = \frac{\vec{v} + \vec{v}_s}{f_s} \quad (\text{A.50})$$

La frecuencia escuchada por el observador esta dada por

$$f_o = \frac{\vec{v} - \vec{v}_o}{\frac{\vec{v} + \vec{v}_s}{f_s}} \quad (\text{A.51})$$

Quedando,

$$f_o = \left(\frac{\vec{v} - \vec{v}_o}{\vec{v} + \vec{v}_s} \right) f_s \quad (\text{A.52})$$

Por tanto, la frecuencia disminuye cuando la fuente y el observador se alejan entre sí, ya que $\vec{v} - \vec{v}_o < \vec{v} + \vec{v}_s$, lo cual implica que $f_o < f_s$

A.5. Generalización

De forma general, la siguiente ecuación establece todos los casos anteriormente mencionados:

$$f_o = \left(\frac{\vec{v} \pm \vec{v}_o}{\vec{v} \mp \vec{v}_s} \right) f_s \quad (\text{A.53})$$

Los signos superiores hacen referencia cuando la fuente y el observador se acercan entre sí, mientras que los signos inferiores implican que se alejan.

La frecuencia es mayor conforme el observador y la fuente se acercan entre sí y más baja conforme se alejan.

Anexo B

Ecuación de onda

B.1. Ecuación de onda lineal

La ecuación de onda lineal permite describir completamente un movimiento ondulatorio y puede ser aplicada para el estudio de gran variedad de ondas. En este apartado se deducirá la ecuación de onda para una cuerda (Boyce, 1998).

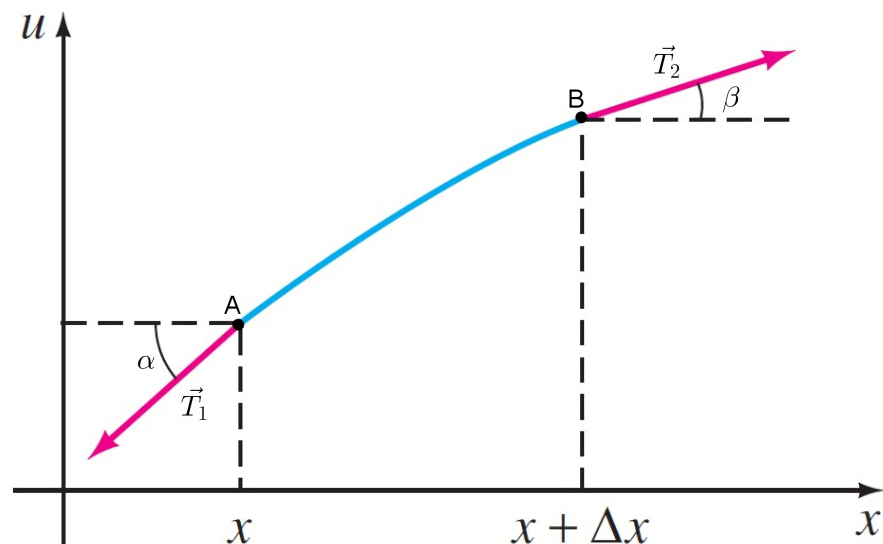


Figura B.1.1: Cuerda. Dedución de la ecuación de onda lineal.

Suponiendo que la amplitud de la onda que se propaga en la cuerda es pequeña en comparación con la longitud de onda, consideraremos que cada punto se mueve únicamente de manera vertical y además que la masa de la cuerda por unidad de longitud es constante, es decir la densidad de masa.

Inicialmente se toma un trozo de la cuerda, del punto A al punto B de longitud Δx y masa

$$m = \mu \Delta x \quad (\text{B.1})$$

donde μ es la masa de la cuerda por unidad de longitud. Se debe tener en cuenta que la cuerda esta sometida a una tensión \vec{T} y por ende actúan fuerzas tangenciales \vec{T}_1 y \vec{T}_2 que pasan por los puntos A y B , respectivamente. Dichas fuerzas forman ángulos muy pequeños con la horizontal o el eje x , los ángulos α y β , como se puede evidenciar en la Figura B.1.2.

Luego, se determinan las fuerzas que actúan en los componentes x y y , para esto se realiza la descomposición vectorial de \vec{T}_1 y \vec{T}_2 ,

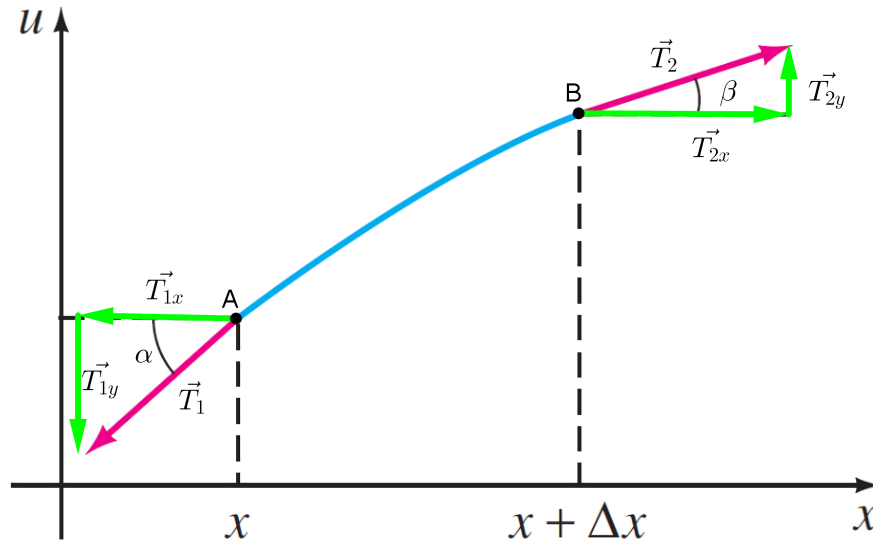


Figura B.1.2: Descomposición vectorial de fuerza aplicada a una cuerda de longitud Δx .

Donde:

$$\sin \alpha = \frac{T_{1y}}{T_1} \Rightarrow T_{1y} = T_1 \cdot \sin \alpha \quad (\text{B.2})$$

$$\cos \alpha = \frac{T_{1x}}{T_1} \Rightarrow T_{1x} = T_1 \cdot \cos \alpha \quad (\text{B.3})$$

$$\sin \beta = \frac{T_{2y}}{T_2} \Rightarrow T_{2y} = T_2 \cdot \sin \beta \quad (\text{B.4})$$

$$\cos \beta = \frac{T_{2x}}{T_2} \Rightarrow T_{2x} = T_2 \cdot \cos \beta \quad (\text{B.5})$$

Aplicando la segunda ley de Newton, la cual enuncia que:

“ Si una fuerza externa neta actúa sobre un cuerpo, éste se acelera. La dirección de la aceleración es la misma que la dirección de la fuerza neta. El vector de la fuerza neta es igual a la masa del cuerpo multiplicada por su aceleración” (Giancoli, 2008, pág. 117).

Simbólicamente,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (\text{B.6})$$

con base en lo anterior, se determina las fuerzas en cada componente:

- Fuerzas resultantes en x :

$$\sum \vec{F}_x = T_{2x} - T_{1x} \quad (\text{B.7})$$

de acuerdo a la segunda ley de Newton, la ecuación B.6, se tiene:

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \quad (\text{B.8})$$

dado que se supuso que la cuerda solo tenía un movimiento vertical, entonces $\vec{a}_x = 0$, por tanto, $\sum \vec{F}_x = 0$. Al combinar las ecuaciones B.7 y B.8 se obtiene:

$$T_{2x} - T_{1x} = 0 \quad (\text{B.9})$$

De lo cual se concluye que

$$T_{2x} = T_{1x} = \vec{T} \quad (\text{B.10})$$

- Fuerzas resultantes en y :

$$\sum \vec{F}_y = T_{2y} - T_{1y} \quad (\text{B.11})$$

de acuerdo a la ecuación B.6

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \quad (\text{B.12})$$

por consiguiente,

$$T_{2y} - T_{1y} = m\vec{a}_y \quad (\text{B.13})$$

Ahora, reemplazando las expresiones B.3 y B.4 en la ecuación B.13

$$\vec{T}_2 \cdot \sin \beta - \vec{T}_1 \cdot \sin \alpha = m\vec{a}_y \quad (\text{B.14})$$

teniendo en cuenta B.10

$$\vec{T} \cdot \sin \beta - \vec{T} \cdot \sin \alpha = m\vec{a}_y \quad (\text{B.15})$$

factorizando \vec{T}

$$\vec{T} (\sin \beta - \sin \alpha) = m\vec{a}_y \quad (\text{B.16})$$

dado que los ángulos son muy pequeños se puede usar la siguiente aproximación:

$$\sin \theta \approx \tan \theta \quad (\text{B.17})$$

Así,

$$\vec{T} (\tan \beta - \tan \alpha) = m\vec{a}_y \quad (\text{B.18})$$

La tangente del ángulo θ con respecto a la horizontal representa la pendiente de la línea tangente a la cuerda en cada uno de sus puntos, de modo que la pendiente es la primera derivada de $\phi(x, t)$ con respecto a x para t constante, así:

$$\tan \theta = \frac{d\phi(x, t)}{dx} \quad (\text{B.19})$$

como la tangente se evalúa en un instante particular del tiempo, se puede expresar en forma parcial

$$\tan \theta = \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \quad (\text{B.20})$$

Teniendo en cuenta lo anterior, $\tan \alpha$ y $\tan \beta$ representan la pendiente de la recta tangente a la cuerda evaluados en los puntos x y $x + \Delta x$, respectivamente. De este modo se puede reescribir la ecuación B.18

$$\vec{T} \left(\left. \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \right|_x \right) = m\vec{a}_y \quad (\text{B.21})$$

Suponiendo que:

$$f(x) = \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \quad (\text{B.22})$$

entonces

$$\vec{T}(f(x)|_{x+\Delta x} - f(x)|_x) = m\vec{a}_y \quad (\text{B.23})$$

evaluando

$$\vec{T}(f(x + \Delta x) - f(x)) = m\vec{a}_y \quad (\text{B.24})$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que m es la masa de la cuerda, la cual está dada por la expresión B.1 y que la aceleración de una partícula está dada por la segunda derivada de $\phi(x, t)$ con respecto a t , luego:

$$\vec{T}(f(x + \Delta x) - f(x)) = \mu \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.25})$$

Multiplicando por $\frac{1}{\vec{T}\Delta x}$

$$\frac{1}{\vec{T}\Delta x} \left(\vec{T}(f(x + \Delta x) - f(x)) \right) = \frac{1}{\vec{T}\Delta x} \left(\mu \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \right) \quad (\text{B.26})$$

Quedando

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\mu}{\vec{T}} \cdot \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.27})$$

Ahora, tomando el limite cuando $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mu}{\vec{T}} \cdot \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.28})$$

Luego

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\mu}{\vec{T}} \cdot \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.29})$$

El lado derecho de la ecuación B.29 representa la definición de derivada con respecto a x , es decir,

$$\frac{df}{dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{B.30})$$

teniendo en cuenta la expresión B.22 y que se esta trabajando con derivadas parciales, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{B.31})$$

Quedando finalmente,

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\vec{T}} \cdot \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.32})$$

Reescribiendo la ecuación B.32

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\vec{T}}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{B.33})$$

La ecuación B.33 representan la ecuación de onda para una cuerda, donde la velocidad v de las ondas en la cuerda esta dada por

$$v = \sqrt{\frac{\vec{T}}{\mu}} \quad (\text{B.34})$$

De manera general

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{B.35})$$

Siendo la ecuación B.35 la ecuación de onda lineal generalizada, el lado izquierdo representa la segunda derivada temporal de la función de onda $\phi(x, t)$ y el lado derecho es el producto de la velocidad de la propagación de la onda al cuadrado por la segunda derivada espacial de $\phi(x, t)$.

De manera análoga y suponiendo que la onda se propaga en sobre una superficie rectangular, la ecuación de onda bidimensional esta dada por:

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.36})$$

Anexo C

Método de diferencia finitas

El método de Diferencias Finitas (MDF) es un método numérico que permite la resolución de ecuaciones diferenciales parciales definidas en número finito de puntos, es apropiado para el tratamiento de problemas en una, dos y tres dimensiones. Con este método se realiza una aproximación de las derivadas parciales mediante un número finito de expresiones algebraicas en términos de la variable dependiente de los puntos seleccionados, estos puntos se convierten en incógnitas del sistema de ecuaciones (Carrillo Ledesma et al., 2018).

Para realizar los cálculos numéricos en diferencias finitas se suele aproximar $f(x)$ mediante un polinomio alrededor de $x = x_0$, dicha aproximación se puede realizar usando la serie de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\Delta x)^n \quad (\text{C.1})$$

donde $\Delta x = (x - x_0)$. La expansión de la serie de Taylor esta dada por:

$$f(x) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)\Delta x}{1!} + \frac{f''(x_i)\Delta x^2}{2!} + \frac{f'''(x_i)\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (\text{C.2})$$

Existen diferentes formas para determinar las aproximaciones: diferencias progresivas, diferencias regresivas y diferencias centradas.

C.1. Derivadas en una dimensión

Aproximación de la primer derivada

C.1.1. Diferencias Finitas Progresivas

Tomando en consideración la ecuación C.2 hasta el tercer término para aproximar $f'(x)$ al rededor de x_i , se supone que $x_i \in (a, b)$, donde $f \in C^2 [a, b]$

$$f(x) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)\Delta x}{1!} + \frac{f''(x_i)\Delta x^2}{2!} \quad (\text{C.3})$$

para realizar la aproximación de $f'(x_i)$ se realiza un truncamiento en el segundo término de la serie de Taylor, evaluando $x = x_i + \Delta x$

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + \frac{f''(\epsilon_i)\Delta x^2}{2} \quad (\text{C.4})$$

Despejando $f'(x_i)$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{f''(\epsilon_i)\Delta x}{2} \quad (\text{C.5})$$

para algún $\epsilon_i \in [x_i, x_i + \Delta x]$.

En este caso la aproximación $f'(x_i)$ es de orden uno, es decir, $O(\Delta x)$ y el error local de truncamiento esta dado

$$O_p(\Delta x) = -\frac{f''(\epsilon_i)\Delta x}{2} \quad (\text{C.6})$$

Tomando valores muy pequeños para Δx , despreciando $O_p(\Delta x)$ y por simplicidad en la notación quedaría:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (\text{C.7})$$

C.1.2. Diferencias Finitas Regresivas

Realizando la expansión de la ecuación C.2 hasta $n = 2$ y evaluando $x = x_i - \Delta x$:

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \frac{f'(x_i)\Delta x}{1!} + \frac{f''(\epsilon_{-i})\Delta x^2}{2!} \quad (\text{C.8})$$

Despejando $f'(x_i)$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{f''(\epsilon_{-i})\Delta x}{2} \quad (\text{C.9})$$

El error local de truncamiento sería:

$$O_r(\Delta x) = \frac{f''(\epsilon_{-i})\Delta x}{2} \quad (\text{C.10})$$

para algún $\epsilon_{-i} \in [x_i - \Delta x, x_i]$

Finalmente se tiene:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} \quad (\text{C.11})$$

C.1.3. Diferencias Finitas Centradas

Desarrollando una función $f(x)$ en un tercer polinomio de Taylor, se toma $n = 3$ en la ecuación C.2 y suponiendo que $f \in C^3[x_{i-1}, x_{i+1}]$, se evalúa $x = x_i + \Delta x$, $x = x_i - \Delta x$:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + \frac{f''(x_i)\Delta x^2}{2} + \frac{f'''(\epsilon_i)\Delta x^3}{6} \quad (\text{C.12})$$

para algún $\epsilon_i \in [x_i, x_i + \Delta x]$ y

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - f'(x_i)\Delta x + \frac{f''(x_i)\Delta x^2}{2} - \frac{f'''(\epsilon_{-i})\Delta x^3}{6} \quad (\text{C.13})$$

para algun $\epsilon_{-i} \in [x_i - \Delta x, x_i]$.

Restando la ecuación C.13 de la ecuación C.12, se tiene:

$$f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x) = 2f'(x_i)\Delta x + \frac{f'''(\epsilon_i)\Delta x^3}{6} + \frac{f'''(\epsilon_{-i})\Delta x^3}{6} \quad (\text{C.14})$$

$$f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x) = 2f'(x_i)\Delta x + \frac{1}{6} \left(f'''(\epsilon_i)\Delta x^3 + f'''(\epsilon_{-i})\Delta x^3 \right) \quad (\text{C.15})$$

Por el teorema del valor intermedio, la expresión anterior se simplifica

$$f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x) = 2f'(x_i)\Delta x + \frac{f'''(\epsilon)\Delta x^3}{3} \quad (\text{C.16})$$

Despejando $f'(x_i)$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{f'''(\epsilon)\Delta x^2}{6} \quad (\text{C.17})$$

Presentando un error de truncamiento

$$O_c(\Delta x^2) = -\frac{f'''(\epsilon)\Delta x^2}{6} \quad (\text{C.18})$$

Quedando finalmente una aproximación de $f'(x_i)$ por diferencias centradas

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (\text{C.19})$$

Aproximación de la segunda derivada

Partiendo de la serie de Taylor hasta $n = 4$, se evalúa en $x = x_i + \Delta x$, $x = x_i - \Delta x$

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + \frac{f''(x_i)\Delta x^2}{2} + \frac{f'''(x_i)\Delta x^3}{6} + \frac{f^4(\epsilon_i)\Delta x^4}{24} \quad (\text{C.20})$$

para algún $\epsilon_i \in [x_i, x_i + \Delta x]$ y

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - f'(x_i)\Delta x + \frac{f''(x_i)\Delta x^2}{2} - \frac{f'''(x_i)\Delta x^3}{6} + \frac{f^4(\epsilon_{-i})\Delta x^4}{24} \quad (\text{C.21})$$

para algún $\epsilon_{-i} \in [x_i - \Delta x, x_i]$.

Al sumar se tiene

$$f(x_i + \Delta x) + f(x_i - \Delta x) = 2f(x_i) + f''(x_i)\Delta x^2 + \frac{\Delta x^4}{24} (f^4(\epsilon_i) + f^4(\epsilon_{-i})) \quad (\text{C.22})$$

despejando $f''(x_i)$, se tiene

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i - \Delta x)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{24} (f^4(\epsilon_i) + f^4(\epsilon_{-i})) \quad (\text{C.23})$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i - \Delta x)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} f^4(\epsilon) \quad (\text{C.24})$$

para algún $\epsilon \in [x_i - \Delta x, x_i + \Delta x]$, presentando un error de truncamiento

$$O_c(\Delta x^2) = -\frac{\Delta x^2}{12} f^4(\epsilon) \quad (\text{C.25})$$

Finalmente la aproximación de $f''(x_i)$ suprimiendo el error, quedaría

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (\text{C.26})$$

C.1.4. Derivadas en dos dimensiones

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables para la cual mediante la expansión en series de Taylor se puede calcular la aproximación de $f^n(x_i, y_j)$.

Aproximación de la primera derivada

Para aproximar la primer derivada en dos dimensiones se pueden emplear las tres diferencias antes mencionadas, es decir, la ecuaciones C.7, C.11 y C.19, con sus respectivos errores de truncamiento. Se aplica la aproximación para la variable indicada mientras la otra permanece constante, obteniendo los siguientes resultados:

- Para diferencias progresivas.

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - f(x_i, y_j)}{\Delta x} - \frac{f''(\epsilon_i, y_j)\Delta x}{2} \quad (\text{C.27})$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - f(x_i, y_j)}{\Delta y} - \frac{f''(x_i, \xi_j)\Delta y}{2} \quad (\text{C.28})$$

para algún $\epsilon_i \in [x_i, x_i + \Delta x]$ y $\xi_j \in [y_j, y_j + \Delta y]$

- Para diferencias regresivas.

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{f(x_i, y_j) - f(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta x} + \frac{f''(\epsilon_{-i}, y_j)\Delta x}{2} \quad (\text{C.29})$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{f(x_i, y_j) - f(x_i, y_j - \Delta y)}{\Delta y} + \frac{f''(x_i, \xi_{-j})\Delta y}{2} \quad (\text{C.30})$$

para algún $\epsilon_{-i} \in [x_i - \Delta x, x_i]$ y $\xi_{-j} \in [y_j - \Delta y, y_j]$

- La aproximación por diferencias centradas.

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - f(x_i - \Delta x, y_j)}{2\Delta x} - \frac{f'''(\epsilon, y_j)\Delta x^2}{6} \quad (\text{C.31})$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - f(x_i, y_j - \Delta y)}{2\Delta y} - \frac{f'''(x_i, \xi)\Delta y^2}{6} \quad (\text{C.32})$$

para algún $\epsilon \in [x_i - \Delta x, x_i + \Delta x]$ y $\xi \in [y_j - \Delta y, y_j + \Delta y]$

Aproximación de la segunda deriva

Utilizando diferencias centradas para la segunda derivada se obtiene:

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} f^4(\epsilon_i, y_j) \quad (\text{C.33})$$

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i, y_j - \Delta y)}{\Delta y^2} - \frac{\Delta y^2}{12} f^4(x_i, \xi_j) \quad (\text{C.34})$$

para algún $\epsilon_i \in [x_i - \Delta x, x_i + \Delta x]$ y $\xi_j \in [y_j - \Delta y, y_j + \Delta y]$.

Derivada cruzada

En caso de determinar una derivada cruzada, por ejemplo:

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} \quad (\text{C.35})$$

se discretiza primero respecto a una de las variables y la otra se deja constante. Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \quad (\text{C.36})$$

discretizando primero respecto a y , se utiliza la ecuación C.32:

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} \approx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - f(x_i, y_j - \Delta y)}{2\Delta y} \right) \quad (\text{C.37})$$

ahora, se discretiza respecto a x dejando el otro componente constante

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} \approx \left(\frac{\frac{\partial f(x_i, y_j + \Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_i, y_j - \Delta y)}{\partial x}}{2\Delta y} \right) \quad (\text{C.38})$$

quedando

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} \approx \left(\frac{\frac{f(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y) - f(x_i - \Delta x, y_j + \Delta y)}{2\Delta x} - \frac{f(x_i + \Delta x, y_j - \Delta y) - f(x_i - \Delta x, y_j - \Delta y)}{2\Delta x}}{2\Delta y} \right) \quad (\text{C.39})$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x \partial y} \approx & \frac{f(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y) - f(x_i - \Delta x, y_j + \Delta y)}{4\Delta x \Delta y} \\ & - \frac{f(x_i + \Delta x, y_j - \Delta y) + f(x_i - \Delta x, y_j - \Delta y)}{4\Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

presentado un error de truncamiento general de

$$E = -\frac{\Delta x^2}{12\Delta y} [f'''(\epsilon_1, y_j + \Delta y) - f'''(\epsilon_2, y_j - \Delta y)] - \frac{\frac{\partial}{\partial x} f'''(x_i, \xi) \Delta y^2}{6} \quad (\text{C.41})$$

para algún $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [x_i - \Delta x, x_i + \Delta x]$ y $\xi \in [y_j - \Delta y, y_j + \Delta y]$.

Por otro lado, si se tiene una derivada cruzada de segundo orden

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \quad (\text{C.42})$$

- **Diferencias centradas:** Se discretiza primero respecto a y utilizando diferencias centradas para la aproximación de la primer derivada, es decir, la ecuación C.32

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - f(x_i, y_j - \Delta y)}{2\Delta y} \right) \quad (\text{C.43})$$

luego,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{f(x_i, y_j + \Delta y)}{2\Delta y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{f(x_i, y_j - \Delta y)}{2\Delta y} \right) \quad (\text{C.44})$$

se realiza la discretización respecto a x , utilizando la aproximación para segunda derivada en dos dimensiones, ecuación C.33.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} &\approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y) - 2f(x_i, y_j + \Delta y) + f(x_i - \Delta x, y_j + \Delta y)}{2\Delta y \Delta x^2} \\ &\quad - \frac{f(x_i + \Delta x, y_j - \Delta y) - 2f(x_i, y_j - \Delta y) + f(x_i - \Delta x, y_j - \Delta y)}{2\Delta y \Delta x^2} \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

con un error de truncamiento

$$E_c = -\frac{\Delta x^2}{12} [f^4(\epsilon_1, y_j + \Delta y) - f^4(\epsilon_2, y_j - \Delta y)] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{f'''(x_i, \xi) \Delta y^2}{6} \right] \quad (\text{C.46})$$

para algún $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [x_i - \Delta x, x_i + \Delta x]$ y $\xi \in [y_j - \Delta y, y_j + \Delta y]$.

- **Diferencias progresivas:** Se discretiza la primer derivada respecto a y utilizando diferencias progresivas, la ecuación C.28

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - f(x_i, y_j)}{\Delta y} \right) \quad (\text{C.47})$$

Ahora, se aproxima la segunda derivada en dos dimensiones respecto a x empleando la expresión C.33

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} &\approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y) - 2f(x_i, y_j + \Delta y) + f(x_i - \Delta x, y_j + \Delta y)}{\Delta y \Delta x^2} \\ &\quad - \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta y \Delta x^2} \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

con un error de truncamiento

$$E_p = -\frac{\Delta x^2}{12} [f^4(\epsilon_1, y_j + \Delta y) - f^4(\epsilon_2, y_j)] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{f'''(x_i, \xi) \Delta y}{2} \right] \quad (\text{C.49})$$

para algún $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [x_i - \Delta x, x_i + \Delta x]$ y $\xi \in [y_j - \Delta y, y_j + \Delta y]$.

- **Diferencias Regresivas:** Se discretiza respecto a y usando la discretización en diferencias regresivas para dos dimensiones, la ecuación C.30

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{f(x_i, y_j) - f(x_i, y_j - \Delta y)}{\Delta y} \right) \quad (\text{C.50})$$

para la aproximación de la segunda derivada se aplica la expresión C.33, obteniendo así

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx & \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta y \Delta x^2} \\ & \frac{f(x_i + \Delta x, y_j - \Delta y) - 2f(x_i, y_j - \Delta y) + f(x_i - \Delta x, y_j - \Delta y)}{\Delta y \Delta x^2} \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

con error de truncamiento

$$E_r = -\frac{\Delta x^2}{12} [f^4(\epsilon_1, y_j) - f^4(\epsilon_2, y_j - \Delta y)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{f'''(x_i, \xi) \Delta y}{2} \right] \quad (\text{C.52})$$

para algún $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [x_i - \Delta x, x_i + \Delta x]$ y $\xi \in [y_j - \Delta y, y_j + \Delta y]$.

Derivada temporal

Hasta el momento se ha visto como discretizar la parte espacial de las ecuaciones diferenciales parciales, en este apartado se plantea una discretización de diferencias finitas con respecto al tiempo, que resulta ser similar a la parte espacial.

La aproximación para la primer derivada utilizando diferencias regresivas, progresivas y centradas respectivamente sería:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f(x, t) - f(x, t - \Delta t)}{\Delta t} + \frac{f''(x, \mu) \Delta t}{2} \quad (\text{C.53})$$

para algún $\mu \in [t - \Delta t, t]$.

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} - \frac{f''(x, \mu) \Delta t}{2} \quad (\text{C.54})$$

para algún $\mu \in [t, t + \Delta t]$.

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} - \frac{f'''(x, \mu) \Delta t^2}{6} \quad (\text{C.55})$$

para algún $\mu \in [t - \Delta t, t + \Delta t]$

Para la aproximación de la segunda derivada se emplean diferencias centradas:

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = \frac{f(x, t + \Delta t) - 2f(x, t) + f(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} f^{(4)}(x, \mu) \quad (\text{C.56})$$

para algún $\mu \in [t - \Delta t, t + \Delta t]$

Anexo D

Discretización de la ecuación de onda bidimensional

Partiendo de la ecuación de onda unidimensional, cabe resaltar que para el presente estudio, se recurre a la ecuación de onda para dos dimensiones

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial t^2} = v^2 \left[\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial y^2} \right] \quad (\text{D.1})$$

La discretización se realiza utilizando diferencias centradas en ambos lados de la igualdad, en el lado izquierdo se determina la aproximación de la segunda derivada temporal, mientras que en el lado derecho se halla la aproximación de la segunda derivada en dos dimensiones, respecto a las componentes espaciales x y y . Para esto se emplean las ecuaciones C.33, C.34 y C.56, obteniendo

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial t^2} = \frac{\phi(x, y, t + \Delta t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^4} \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial x^2} = \frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(\epsilon, y, t)}{\partial x^4} \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{\phi(x, y + \Delta y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, \xi, t)}{\partial y^4} \quad (\text{D.4})$$

para algún $\mu \in (t - \Delta t, t + \Delta t)$, $\epsilon \in (x - \Delta x, x + \Delta x)$ y $\xi \in (y - \Delta y, y + \Delta y)$. Al reemplazar las ecuaciones D.2, D.3 y D.4 en la ecuación D.1

$$\begin{aligned}
 & \frac{\phi(x, y, t + \Delta t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^4} = \\
 & v^2 \left[\frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(\epsilon, y, t)}{\partial x^4} + \right. \\
 & \left. + \frac{\phi(x, y + \Delta y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, \xi, t)}{\partial y^4} \right]
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

Se despeja $\phi(x, y, t + \Delta t)$ en la ecuación D.5

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y, t + \Delta t) = \Delta t^2 \cdot v^2 & \left[\frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\phi(x, y + \Delta y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} \right] + \\
 & + 2\phi(x, y, t) - \phi(x, y, t - \Delta t)
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

Presentando un error de truncamiento

$$E = -v^2 \left[\frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^4 \phi(\epsilon, y, t)}{\partial x^4} + \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, \xi, y)}{\partial y^4} \right] + \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^4} \tag{D.7}$$

donde $\epsilon \in (x - \Delta x, x + \Delta x)$, $\xi \in (y - \Delta y, y + \Delta y)$ y $\mu \in (t - \Delta t, t + \Delta t)$.

Obteniendo de este modo la discretización de la ecuación de onda para dos dimensiones, utilizando el método numérico de diferencias finitas, la ecuación presenta un error de truncamiento en cada una de las variables $O(\Delta x^2)$, $O(\Delta y^2)$ y $O(\Delta t^2)$.

Anexo E

Discretización de la ecuación de onda en medios dispersivos

Considerando la ecuación de onda para medios dispersivos

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} + \chi \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} - v^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

La discretización se realiza utilizando diferencias centradas para dos dimensiones, en la aproximación para la segunda derivada, ya sea para variables de carácter temporal o espacial, es decir, C.33, C.34 y C.56. Para la discretización de la primera derivada temporal, se emplean diferencias regresivas, ecuación C.53, ya que esto permite de manera efectiva hallar la solución del sistema.

Es importante resaltar que la ecuación de onda se trabaja en dos dimensiones, por lo cual es necesario, incorporar el componente espacial y , por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial t^2} + \chi \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} - \gamma \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} \right) - \\ - v^2 \left(\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Para el primer término de la ecuación 6.7, se realiza la discretización empleando diferencias centradas para la segunda derivada temporal,

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial t^2} = \frac{\phi(x, y, t + \Delta t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^4} \quad (\text{E.2})$$

El segundo término se discretiza usando diferencias regresivas respecto a t , ecuación C.53

$$\chi \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} = \chi \left(\frac{\phi(x, y, t) - \phi(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^2} \right) \quad (\text{E.3})$$

Para discretizar la derivada cruzada que aparece en el tercer término, tanto para x como para y con relación a t , se realiza primero la derivada interna y luego la derivada externa. En el caso del primer componente, se utiliza la ecuación C.53 para realizar la derivada respecto a t

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\phi(x, y, t) - \phi(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^2} \right) \quad (\text{E.4})$$

Aplicando propiedad distributiva, la expresión anterior se puede reescribir como

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial^2 \phi(x, y, t - \Delta t)}{\partial x^2} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^2} \right) \quad (\text{E.5})$$

utilizando la ecuación C.33 para hallar la aproximación de la segunda derivada respecto a x , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(\epsilon_1, y, t)}{\partial x^4} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\phi(x + \Delta x, y, t - \Delta t) - 2\phi(x, y, t - \Delta t) + \phi(x - \Delta x, y, t - \Delta t)}{\Delta x^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(\epsilon_2, y, t)}{\partial x^4} \right) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Análogamente para el componente y , para aproximar la derivada interna se emplea la ecuación C.53, se aplica propiedad distributiva y por último se utiliza la ecuación C.34 para aproximar la derivada externa, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\phi(x, y + \Delta y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, \xi_1, t)}{\partial y^4} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\phi(x, y + \Delta y, t - \Delta t) - 2\phi(x, y, t - \Delta t) + \phi(x, y - \Delta y, t - \Delta t)}{\Delta y^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, \xi_2, t)}{\partial y^4} \right) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Por lo tanto, el tercer término de la ecuación E.1 quedaría

$$\begin{aligned}
 & \gamma \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} \right] = \\
 & \gamma \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(\epsilon_1, y, t)}{\partial x^4} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\phi(x + \Delta x, y, t - \Delta t) - 2\phi(x, y, t - \Delta t) + \phi(x - \Delta x, y, t - \Delta t)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(\epsilon_2, y, t)}{\partial x^4} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\phi(x, y + \Delta y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, \xi_1, t)}{\partial y^4} \right) - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\phi(x, y + \Delta y, t - \Delta t) - 2\phi(x, y, t - \Delta t) + \phi(x, y - \Delta y, t - \Delta t)}{\Delta y^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, \xi_2, t)}{\partial y^4} \right) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{E.8}$$

El cuarto término de la ecuación E.1 se discretiza empleando diferencias centradas para aproximar la segunda derivada respecto a cada variable, C.33 y C.34,

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial x^2} = \frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(\epsilon, y, t)}{\partial x^4} \tag{E.9}$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{\phi(x, y + \Delta y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, \xi, t)}{\partial y^4} \tag{E.10}$$

luego,

$$\begin{aligned}
 v^2 \left(\frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = v^2 \left[\frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} - \right. \\
 \left. - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, y, t)}{\partial x^4} + \frac{\phi(x, y + \Delta y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} + \right. \\
 \left. + \frac{\phi(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} - \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, y, t)}{\partial y^4} \right]
 \end{aligned} \tag{E.11}$$

Se reemplaza E.2, E.3, E.8 y E.11 en la ecuación E.1 y posteriormente se despeja $\phi(x, y, t + \Delta t)$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y, t + \Delta t) = (\Delta t^2 v^2 + \gamma \Delta t) \left[\frac{\phi(x + \Delta x, y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} + \right. \\
 \left. + \frac{\phi(x, y + \Delta y, t) - 2\phi(x, y, t) + \phi(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} \right] - \gamma \Delta t \cdot \\
 \left[\frac{\phi(x + \Delta x, y, t - \Delta t) - 2\phi(x, y, t - \Delta t) + \phi(x - \Delta x, y, t - \Delta t)}{\Delta x^2} + \right. \\
 \left. + \frac{\phi(x, y + \Delta y, t - \Delta t) - 2\phi(x, y, t - \Delta t) + \phi(x, y - \Delta y, t - \Delta t)}{\Delta y^2} \right] - \\
 - (\chi \Delta t - 2)\phi(x, y, t) + (\chi \Delta t - 1)\phi(x, y, t - \Delta t)
 \end{aligned} \tag{E.12}$$

Teniendo en cuenta el error de truncamiento de cada uno de los términos de la ecuación E.1 al realizar la discretización, se obtiene un error general

$$\begin{aligned}
 E = & -\frac{v^2 \Delta t^2}{12} \left(\Delta x^2 \frac{\partial^4 \phi(\epsilon, y, t)}{\partial x^4} + \Delta y^2 \frac{\partial^4 \phi(x, \xi, t)}{\partial y^4} \right) - \frac{\chi \Delta t^3}{2} \frac{\partial^2 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^2} - \\
 & - \frac{\gamma \Delta x^2 \Delta t}{12} \left(\frac{\partial^4 \phi(\epsilon_1, y, t)}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \phi(\epsilon_2, y, t)}{\partial x^4} \right) + \frac{\gamma \Delta t^3}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^2} \right) - \frac{\gamma \Delta y^2 \Delta t}{12} \left(\frac{\partial^4 \phi(x, \xi_1, t)}{\partial y^4} - \frac{\partial^4 \phi(x, \xi_2, t)}{\partial y^4} \right) + \\
 & + \frac{\Delta t^4}{12} \frac{\partial^4 \phi(x, y, \mu)}{\partial t^4}
 \end{aligned} \tag{E.13}$$

para algún $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2 \in (x - \Delta x, x + \Delta x)$, $\xi, \xi_1, \xi_2 \in (y - \Delta y, y + \Delta y)$ y $\mu \in (t - \Delta t, t + \Delta t)$

Anexo F

Gráficas de la amplitud en función del tiempo

Es esta sección se muestran las gráficas obtenidas de la amplitud respecto al tiempo en cada uno de los casos estudiados sobre el efecto Doppler, los datos se obtuvieron de la simulación empleando la discretización realizada a la ecuación de onda para medios dispersivos . En cada caso se hace una variación de la velocidad y del coeficiente de atenuación por difusión. El primero varia de 10 en 10 en velocidades entre $10 \text{ m/s} - 60 \text{ m/s}$ y el segundo varía cada $2,5 \text{ Hz}$ entre valores de $0 \text{ Hz} - 10 \text{ Hz}$, mientras que el coeficiente de atenuación por viscosidad se mantiene invariante.

F.1. Caso I: Observador en reposo y la fuente se aleja

F.1.1. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 0 \text{ Hz}$

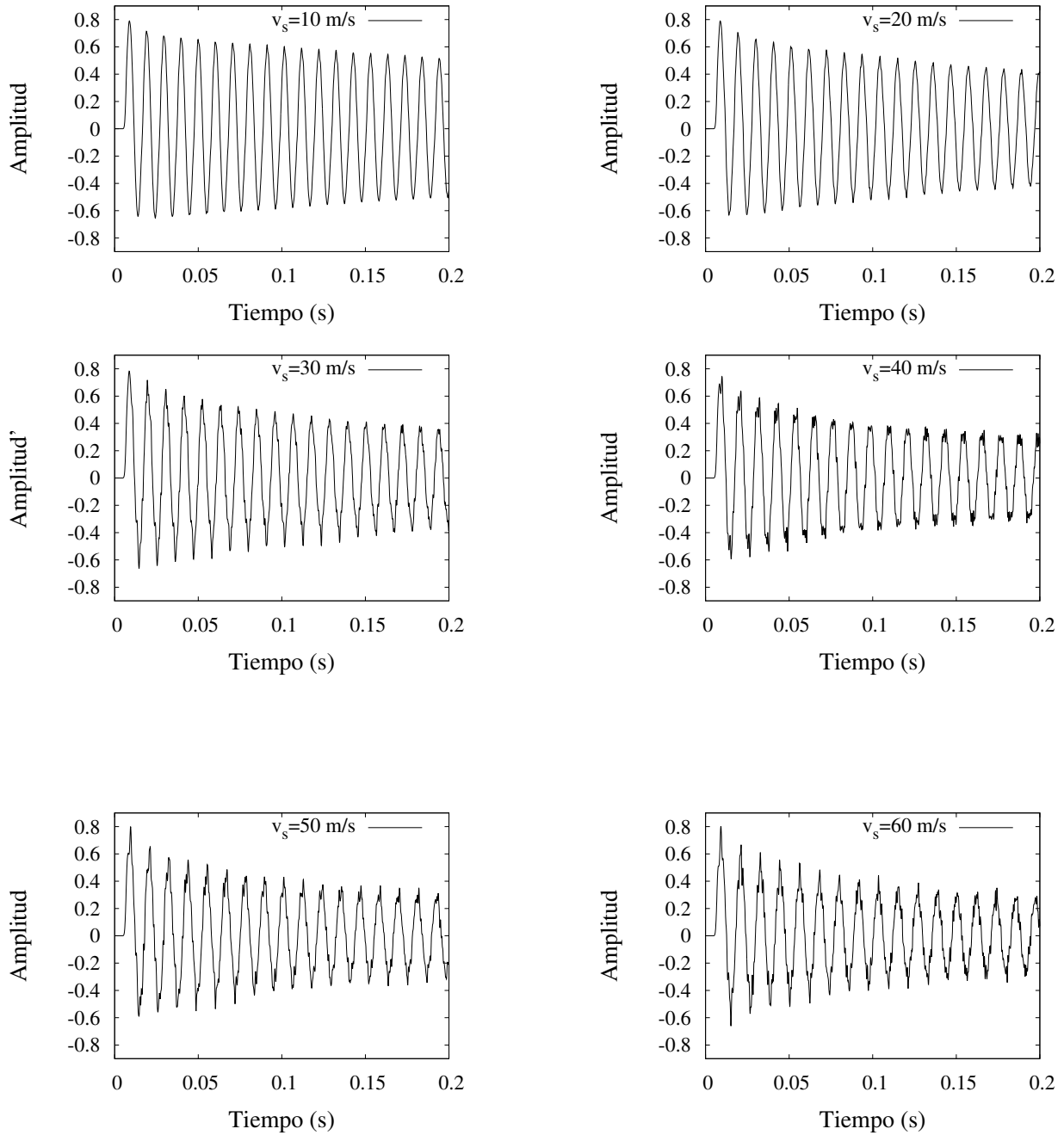


Figura F.1.2: La fuente se aleja del observador con diferentes velocidades que cambian entre 10 m/s y 60 m/s y el observador permanece en reposo, $\chi = 0 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$

F.1.2. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 2,5 \text{ Hz}$

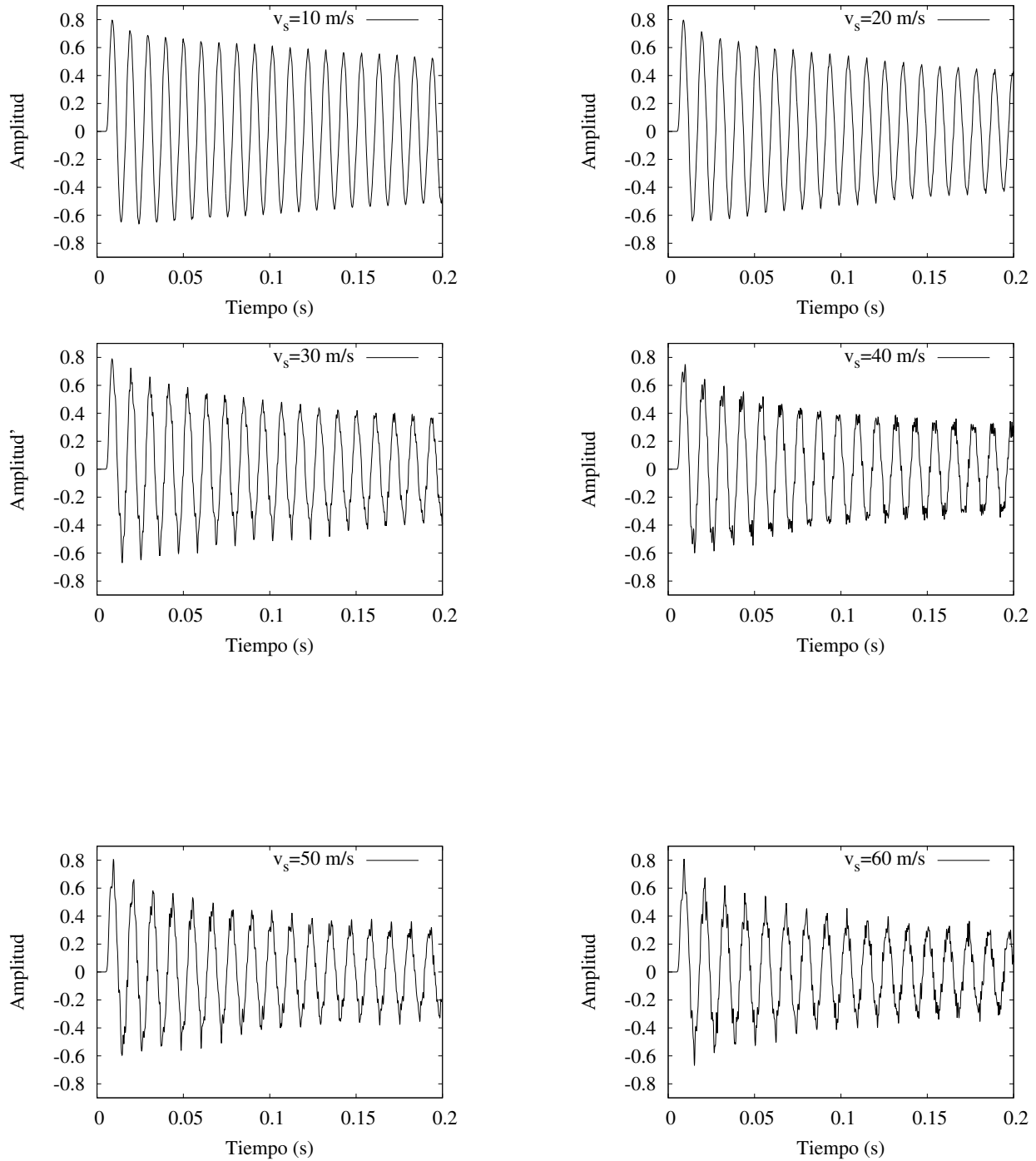


Figura F.1.4: La fuente se aleja del observador variando la velocidad entre $10 - 60 \text{ m/s}$ y el observador permanece en reposo, $\chi = 2,5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.1.3. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 5 \text{ Hz}$

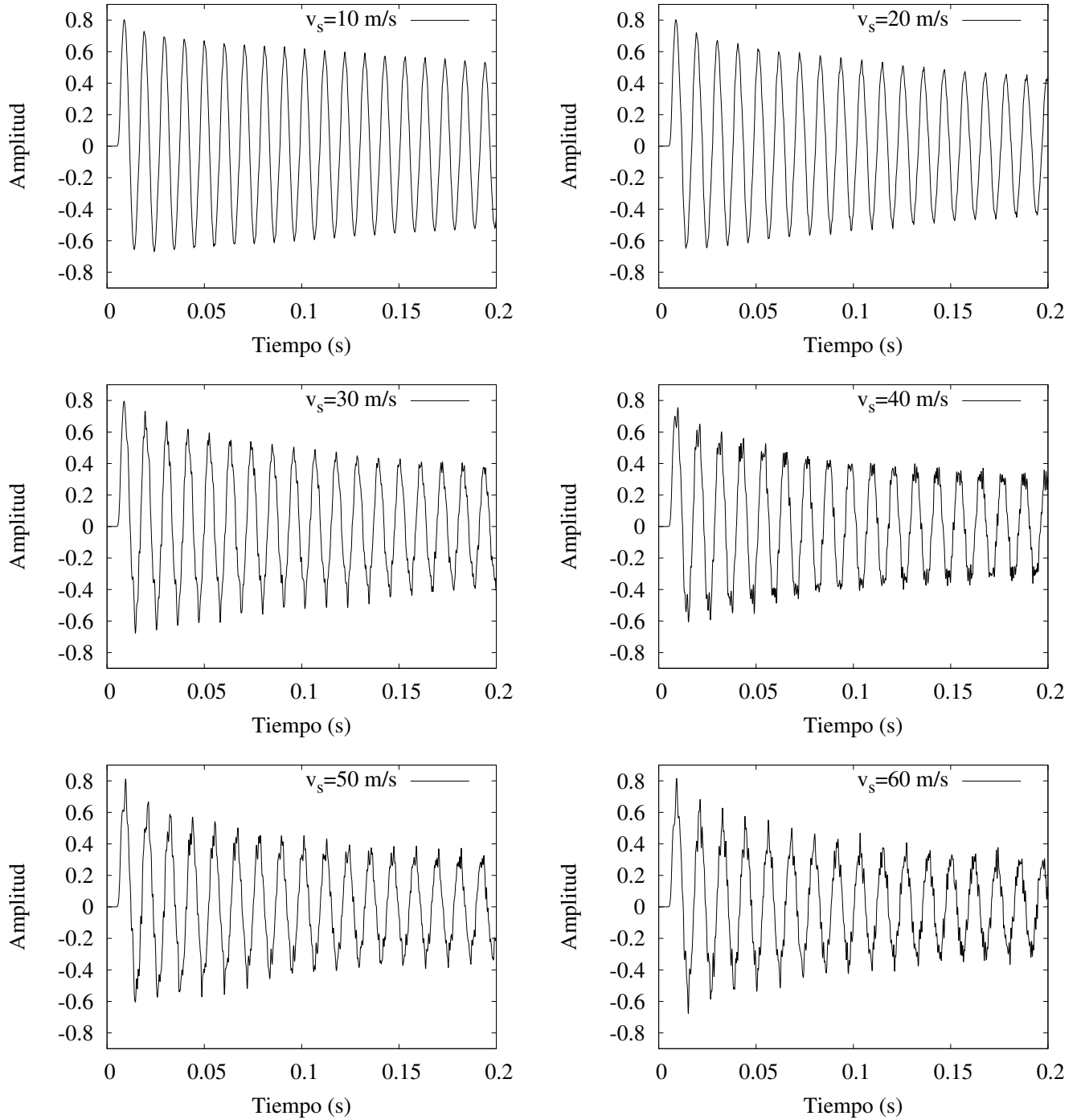


Figura F.1.5: La fuente se aleja del observador con diferentes velocidades, entre $10 \text{ m/s} - 60 \text{ m/s}$ y el observador permanece en reposo, donde $\chi = 5 \text{ Hz}$ $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.1.4. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 7,5 \text{ Hz}$

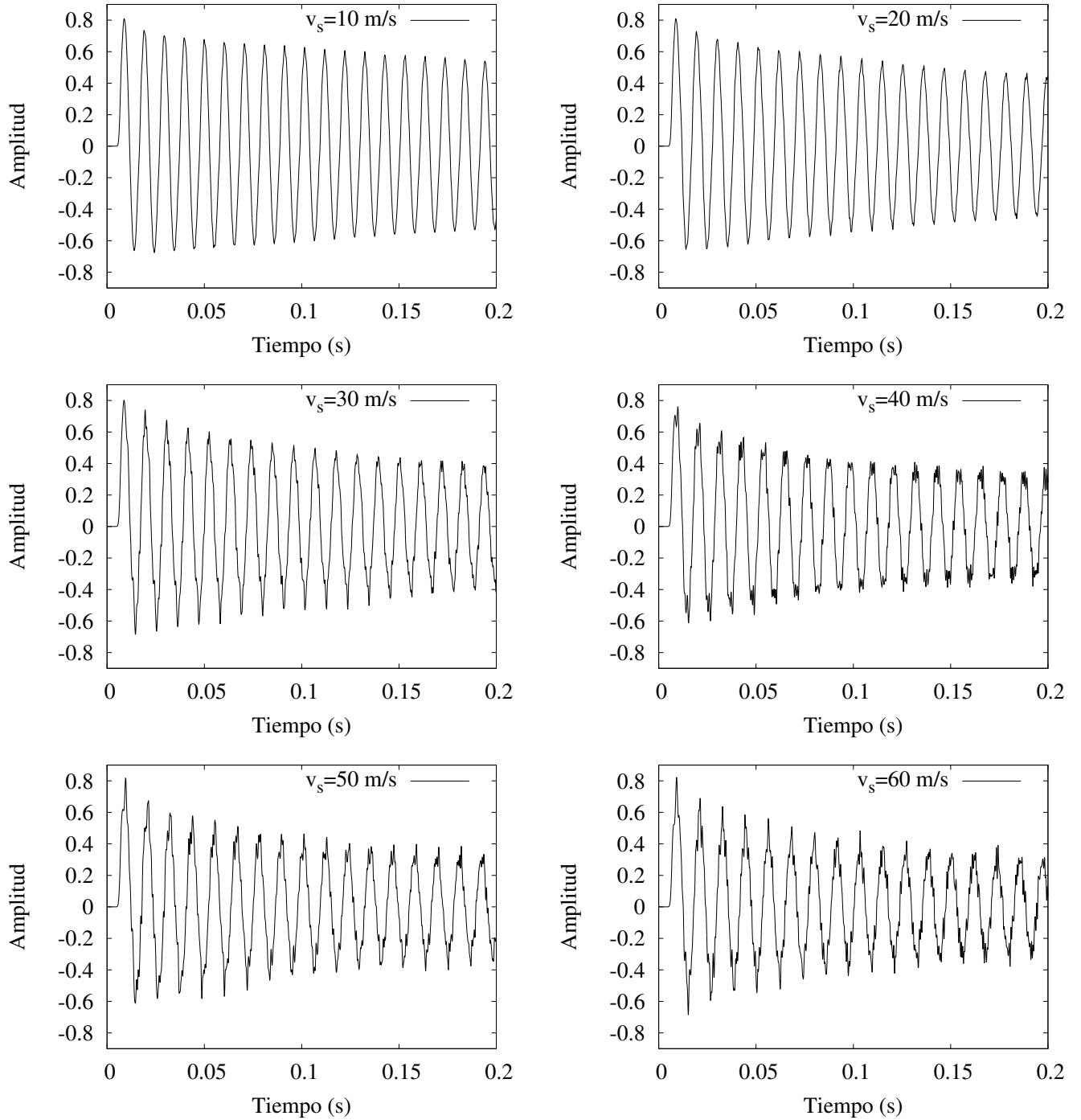


Figura F.1.6: La fuente se aleja del observador con diferentes velocidades y el observador permanece en reposo, con $\chi = 7,5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.1.5. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 10 \text{ Hz}$

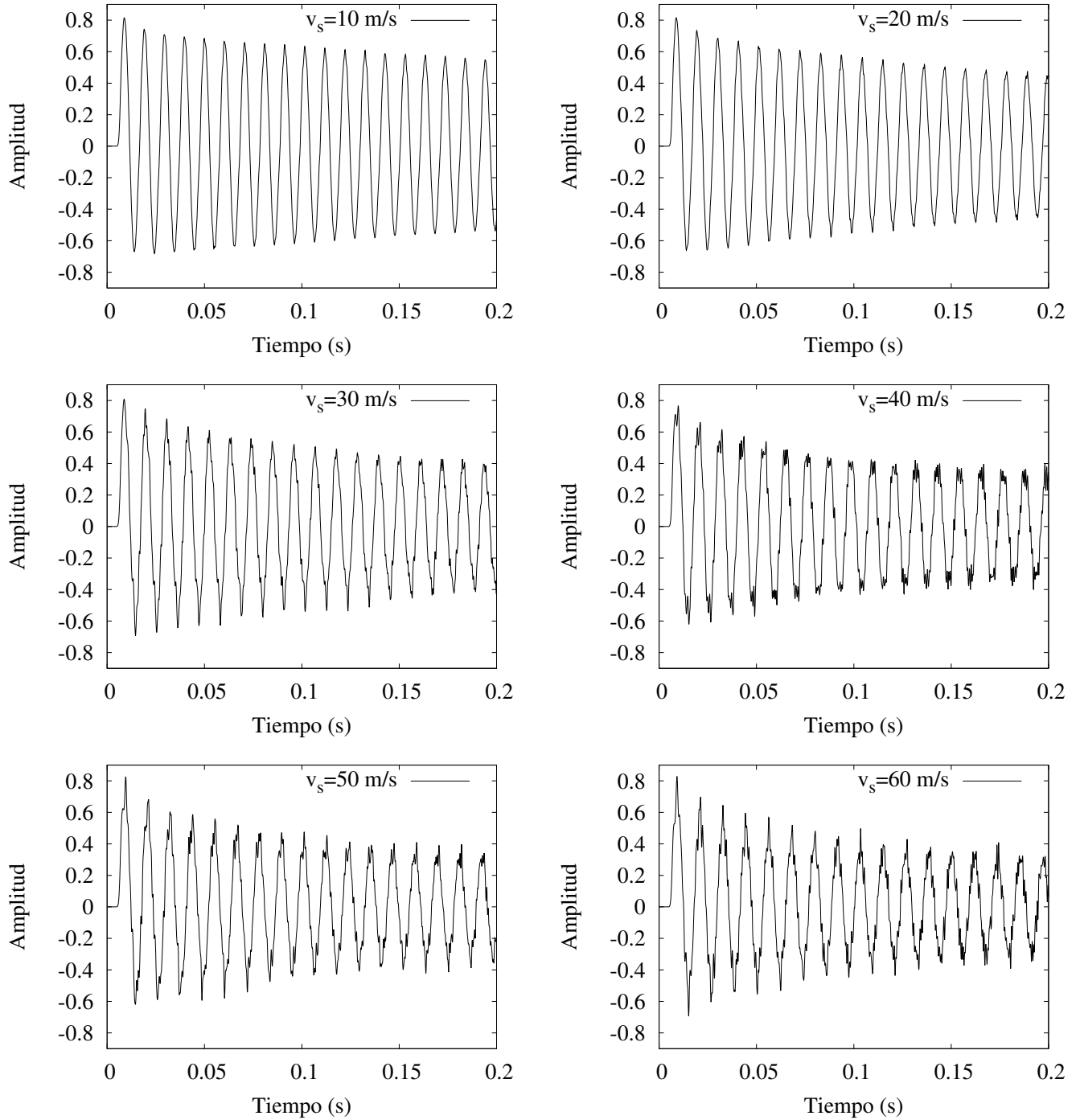


Figura F.1.7: La fuente se aleja del observador con velocidades entre 10 m/s y 60 m/s y el observador permanece en reposo, con $\chi = 10 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.2. Caso II: Observador en reposo y la fuente se acerca

F.2.1. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 0 \text{ Hz}$

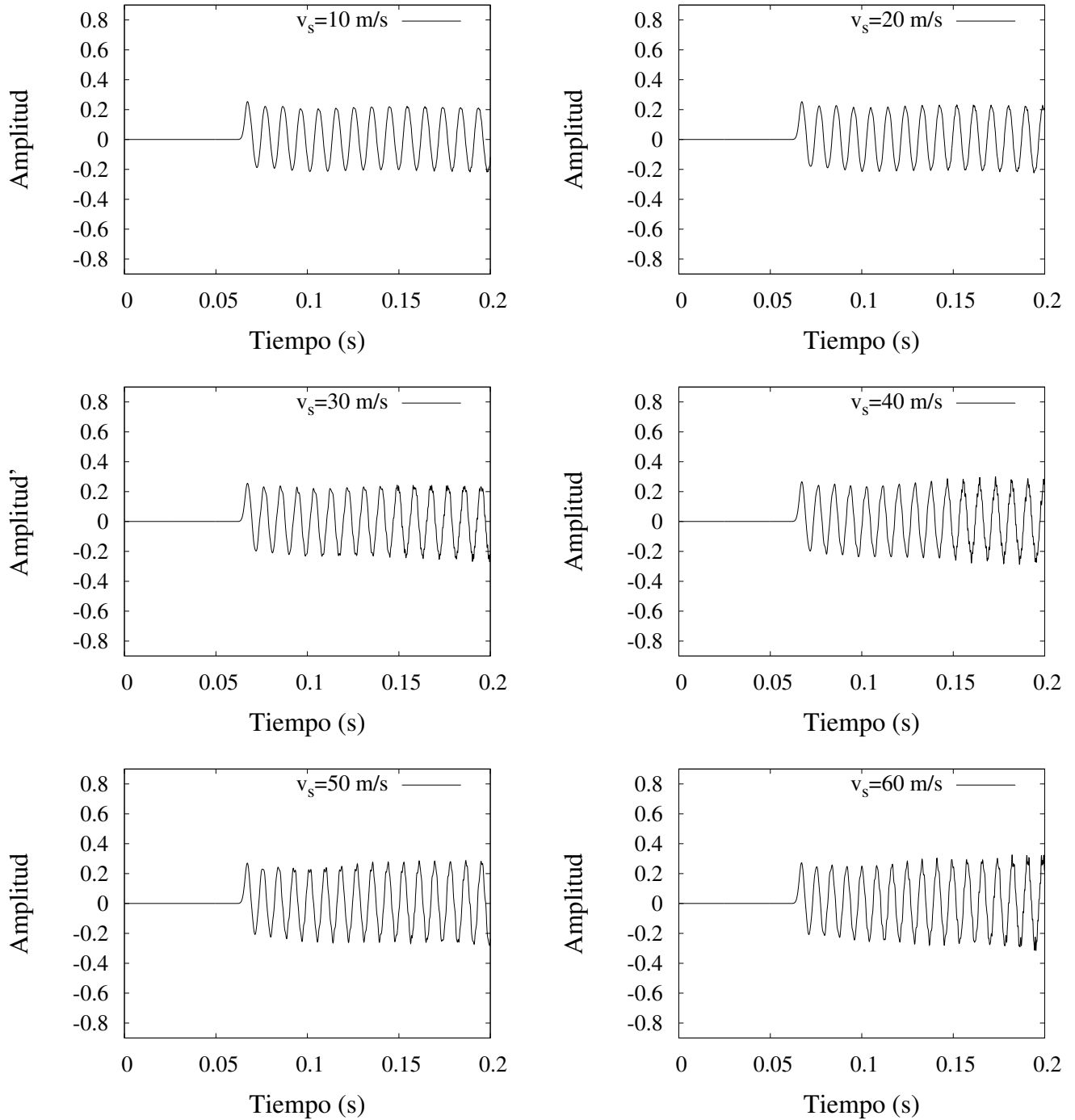


Figura F.2.1: La fuente se acerca al observador con diferentes velocidades y el observador permanece en reposo, con $\chi = 0 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.2.2. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 2,5 \text{ Hz}$

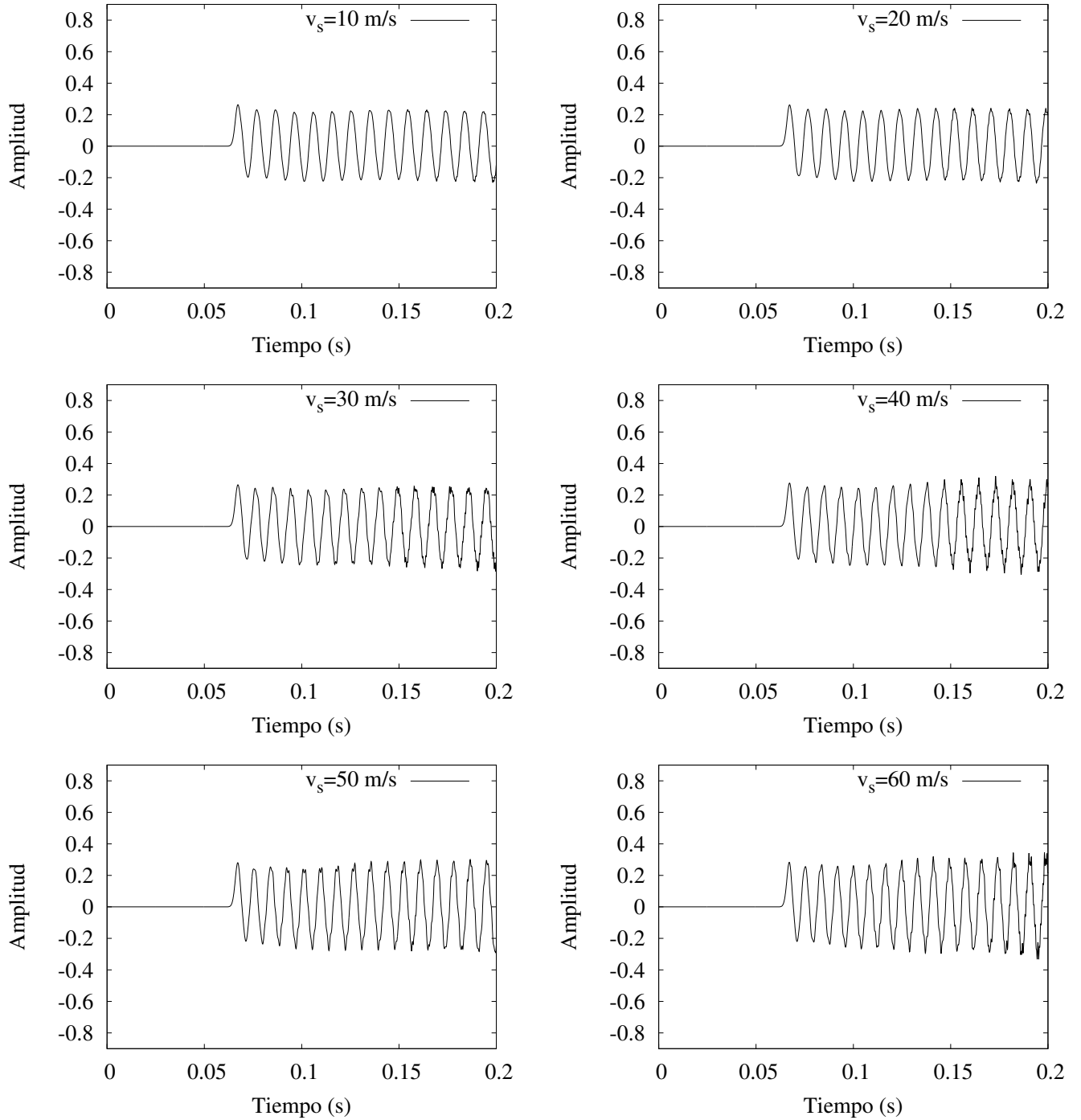


Figura F.2.2: La fuente se acerca al observador con velocidades entre 10 m/s y 60 m/s y el observador permanece en reposo, con $\chi = 2,5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.2.3. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 5 \text{ Hz}$

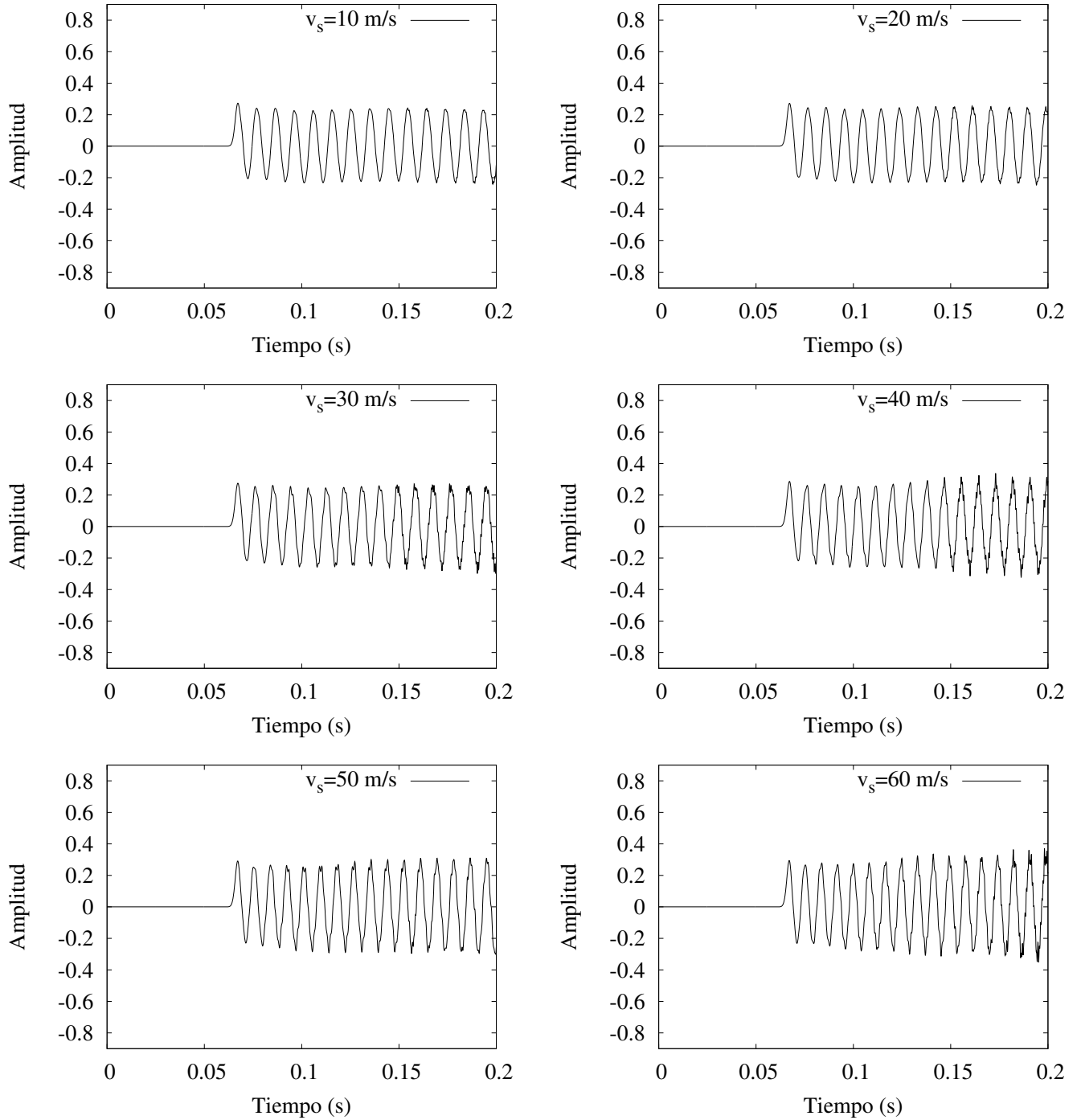


Figura F.2.3: La fuente se acerca al observador con velocidades entre 10 m/s y 60 m/s , el observador permanece en reposo, con $\chi = 5 \text{ Hz}$ - $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.2.4. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 7,5 \text{ Hz}$

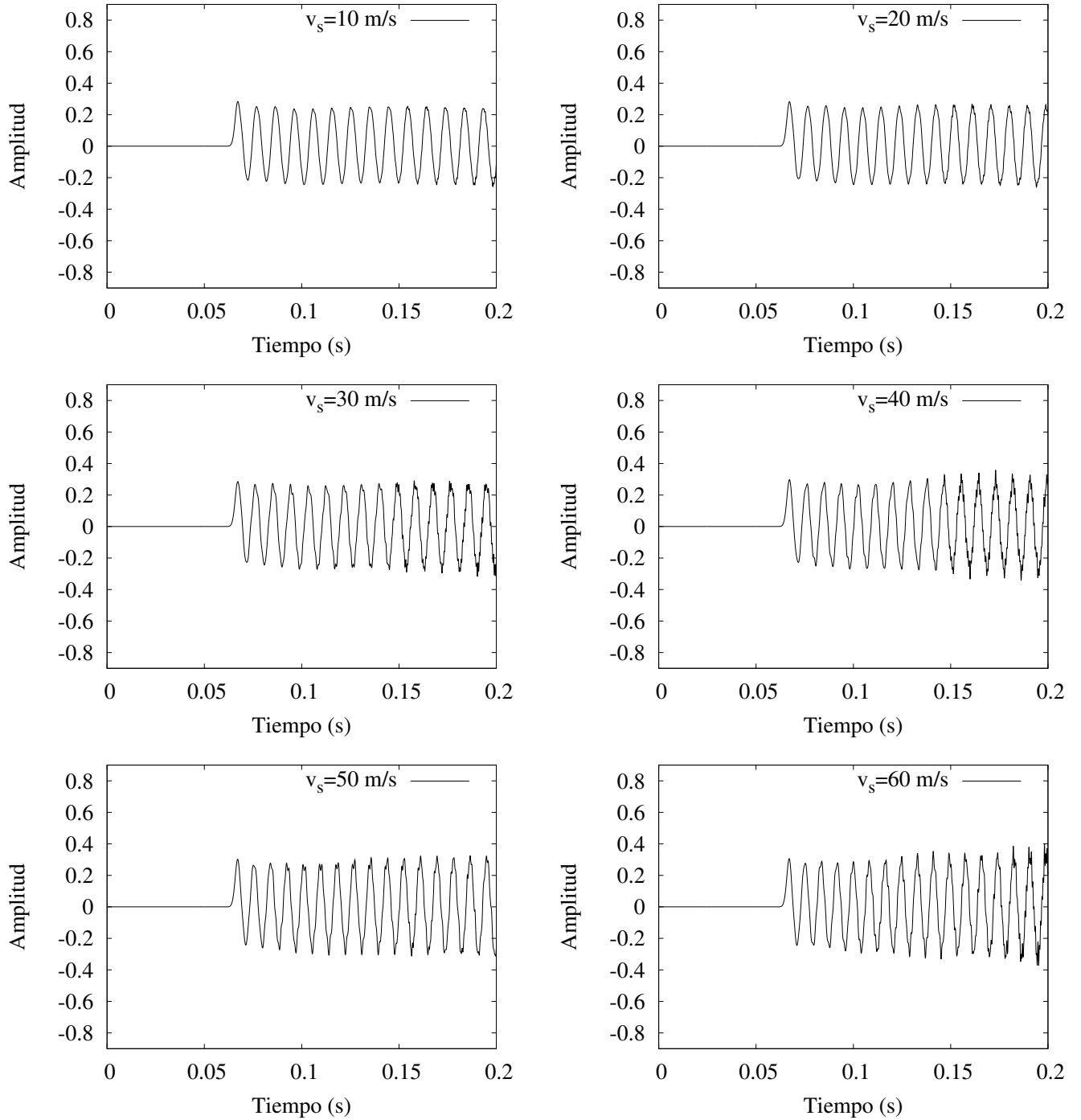


Figura F.2.4: La fuente se acerca al observador con velocidades entre 10 m/s - 60 m/s y el observador permanece en reposo, con $\chi = 7,5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.2.5. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 10 \text{ Hz}$

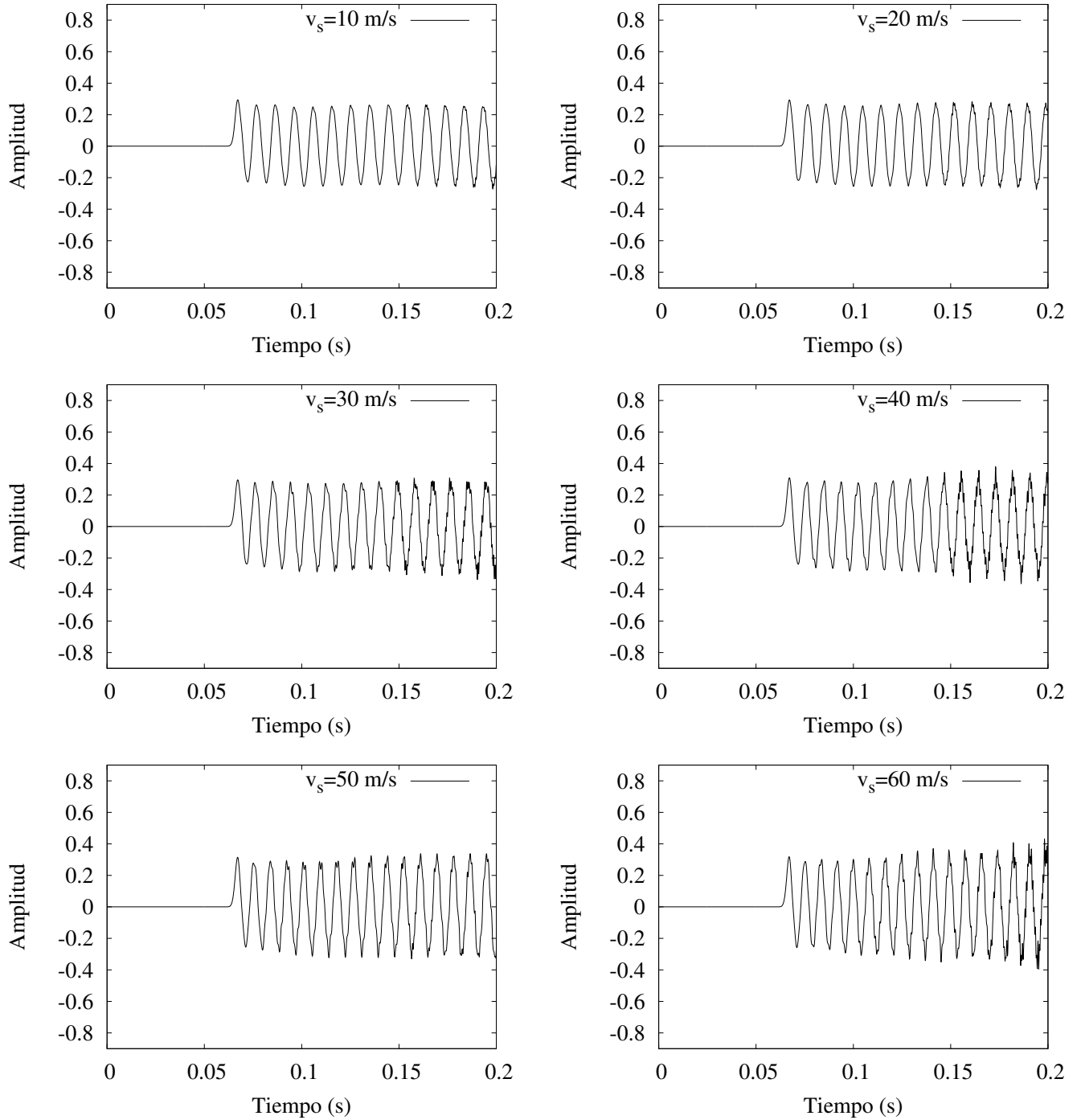


Figura F.2.5: La fuente se acerca al observador con velocidades entre 10 m/s y 60 m/s , el observador permanece en reposo, con $\chi = 10 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.3. Caso III: Observador y fuente se acercan entre sí

F.3.1. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 0 \text{ Hz}$

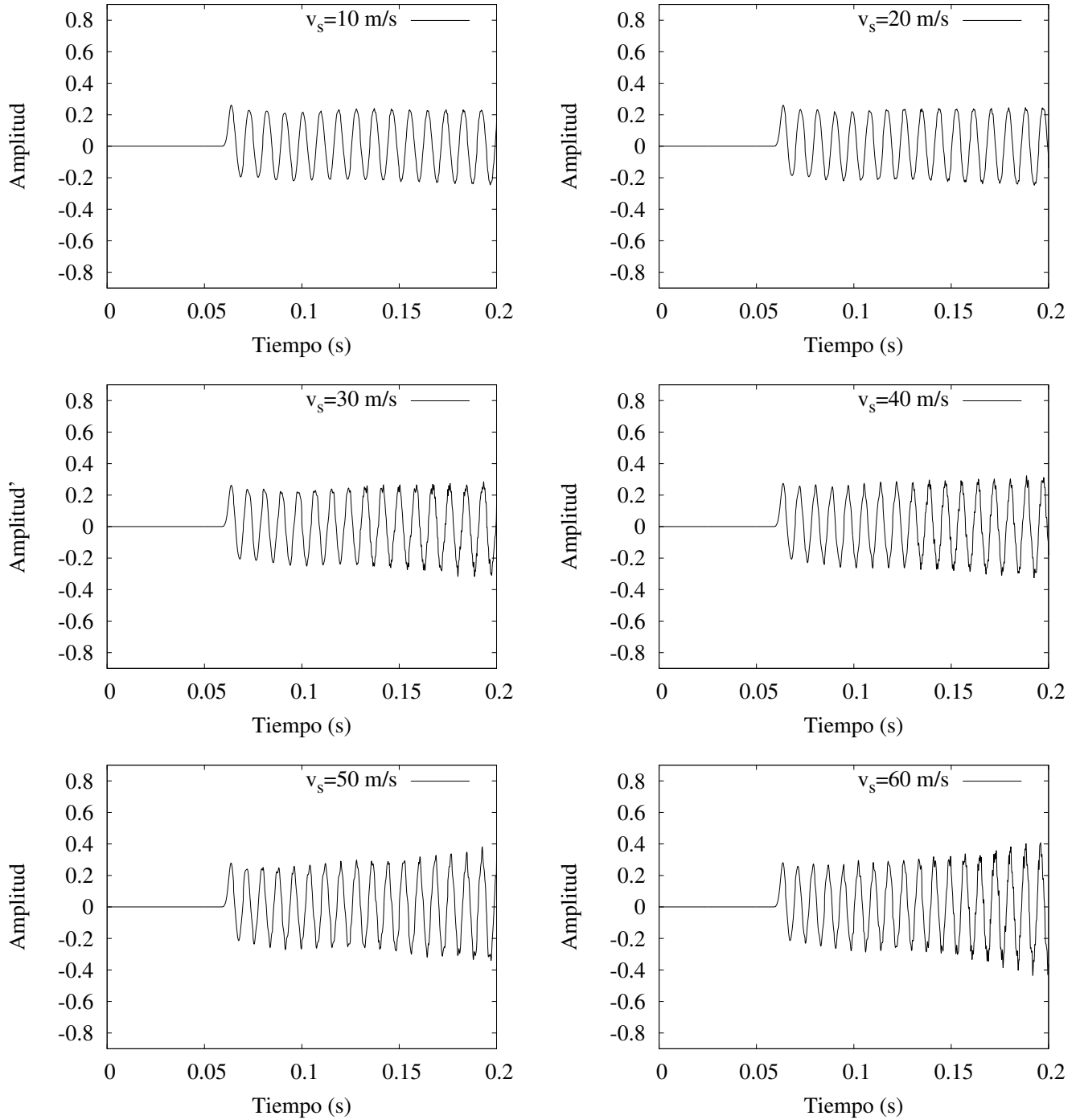


Figura F.3.1: La fuente y el observador se acercan entre sí, el observador se mueve a 20 m/s y la fuente cambia su velocidad entre 10 m/s y 60 m/s , tomando $\chi = 0 \text{ Hz}$ $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.3.2. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 2,5 \text{ Hz}$

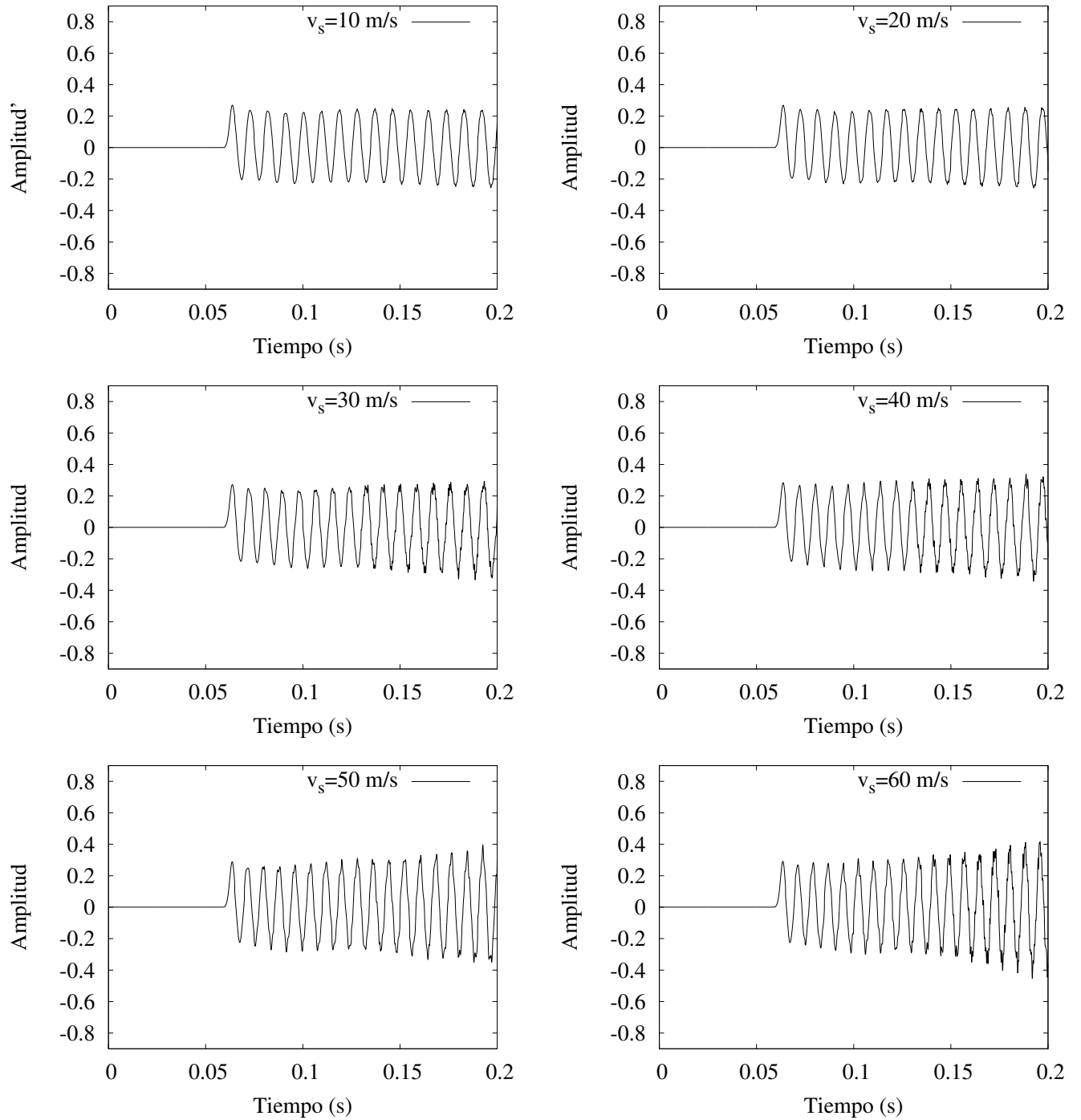


Figura F.3.2: La fuente y el observador se acercan entre sí, el observador se mueve a 20 m/s y la fuente cambia su velocidad entre 10 m/s y 60 m/s , con $\chi = 2,5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.3.3. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 5 \text{ Hz}$

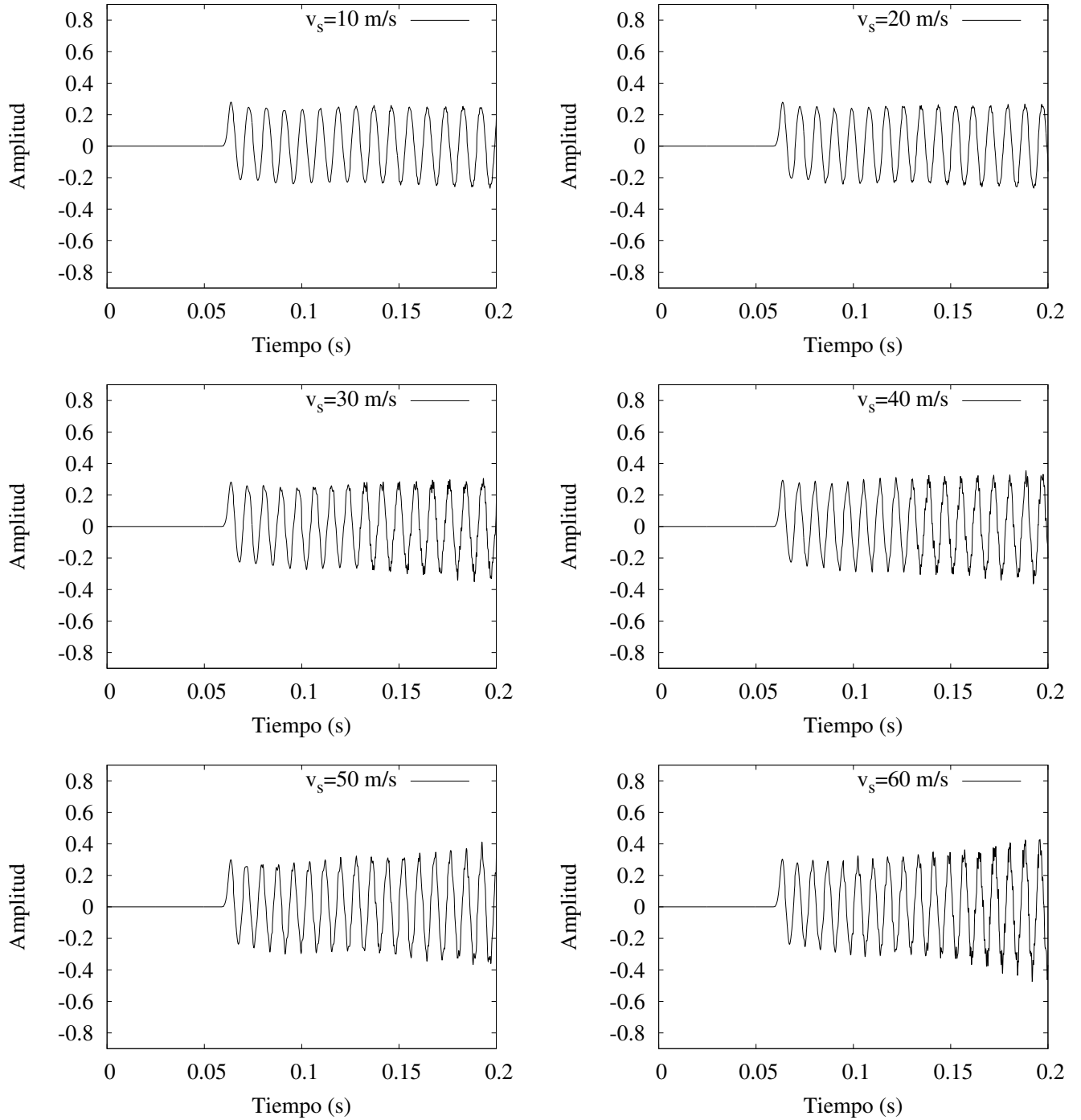


Figura F.3.3: La fuente y el observador se acercan entre sí, el observador se mueve a 20 m/s y la fuente cambia su velocidad entre 10 m/s y 60 m/s , con $\chi = 5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.3.4. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 7,5 \text{ Hz}$

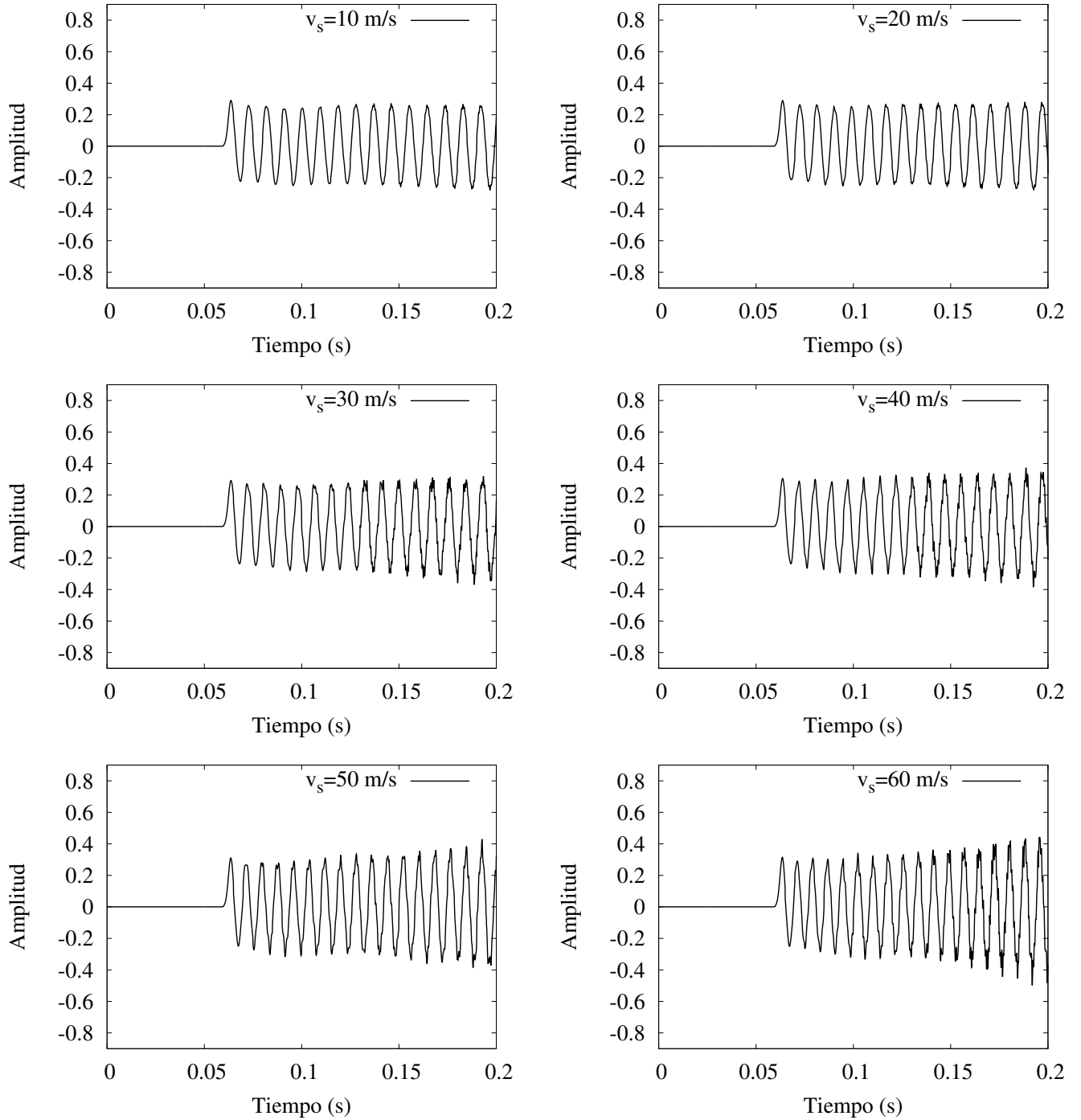


Figura F.3.4: La fuente y el observador se acercan entre sí, el observador se mueve a 20 m/s y la fuente cambia su velocidad entre 10 m/s y 60 m/s , con $\chi = 7,5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.3.5. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 10 \text{ Hz}$

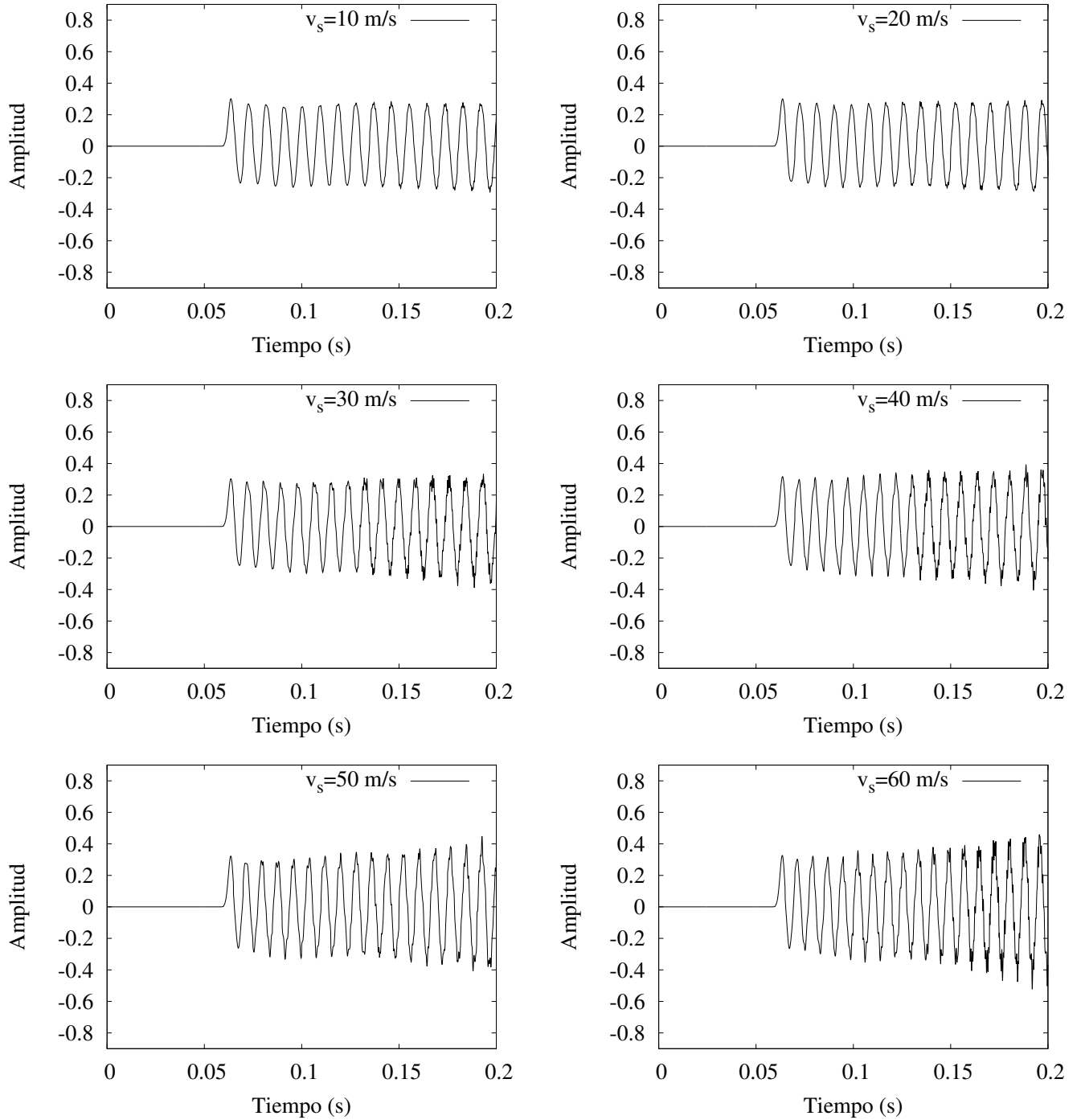


Figura F.3.5: La fuente y el observador se acercan entre sí, el observador se mueve a 20 m/s y la fuente cambia su velocidad entre 10 m/s y 60 m/s , con $\chi = 10 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.4. Caso IV: Fuente en reposo y el observador se acerca a ésta

F.4.1. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 0 \text{ Hz}$

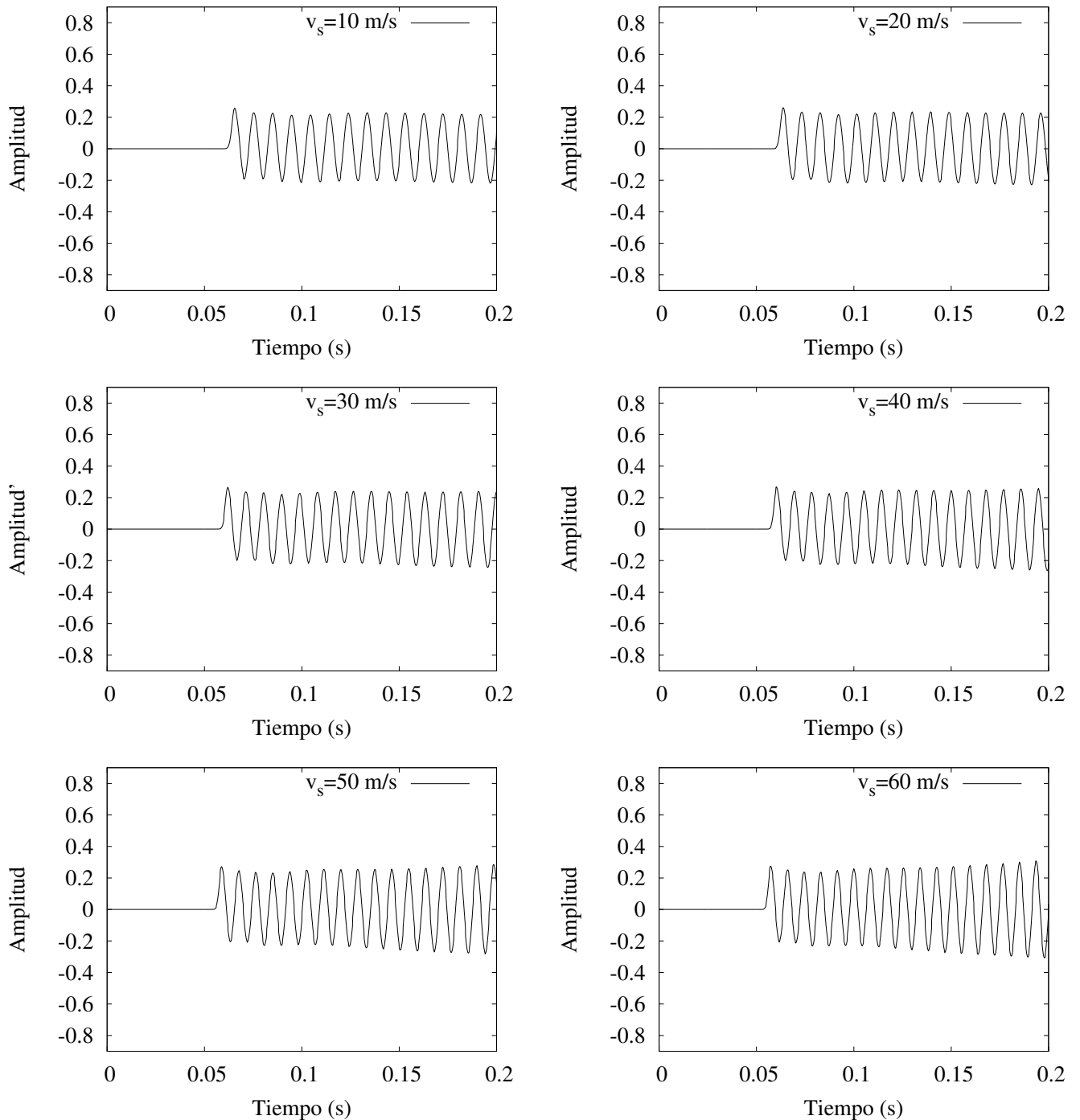


Figura F.4.1: El observador se acerca a una fuente de sonido inmóvil, $\vec{v}_s = 20 \text{ m/s}$. La velocidad del observador varía entre 10 m/s y 60 m/s , con $\chi = 0 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.4.2. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 2,5 \text{ Hz}$

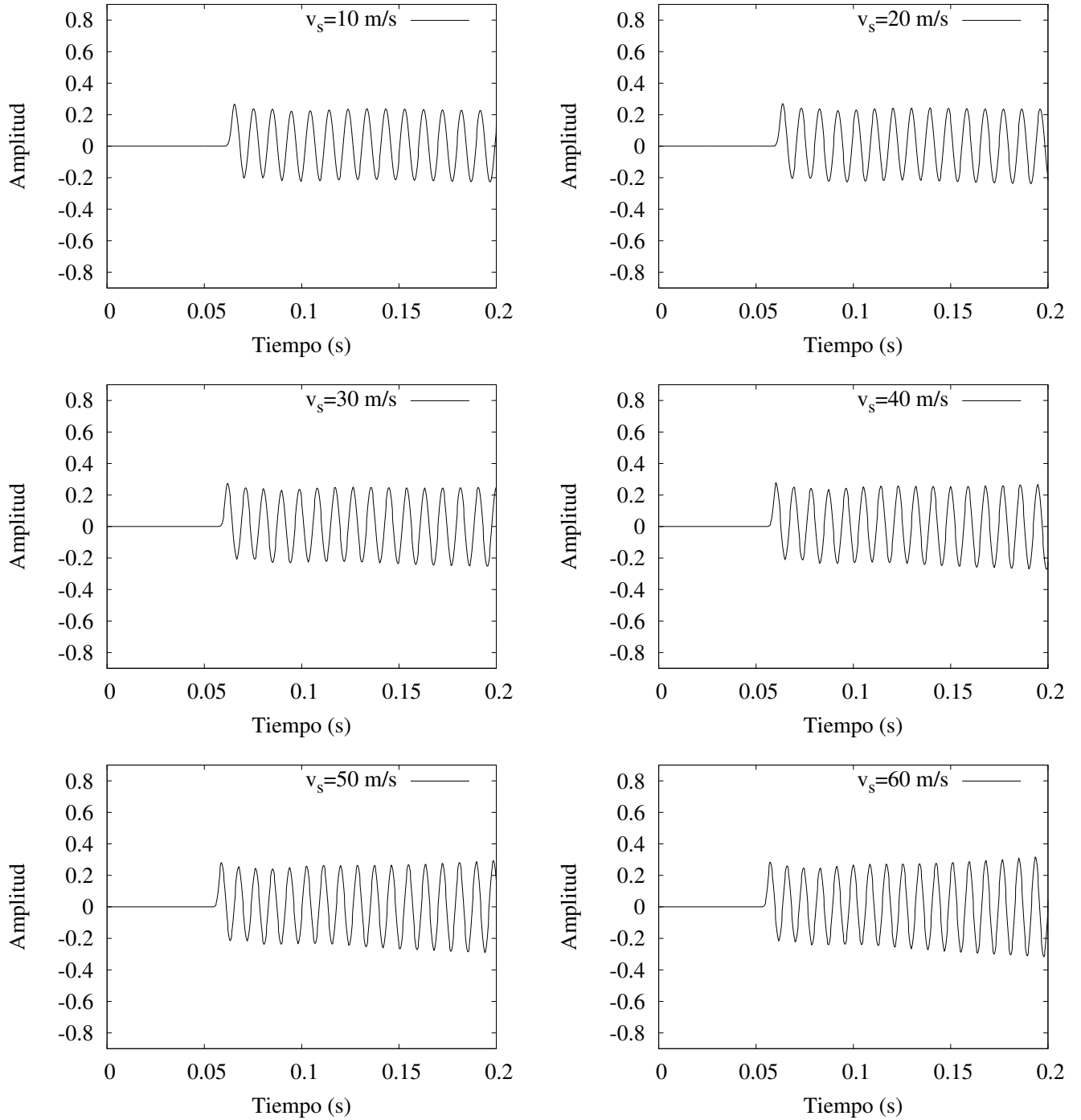


Figura F.4.2: El observador se acerca a una fuente de sonido inmóvil, $\vec{v}_s = 20 \text{ m/s}$. La velocidad del observador varía entre 10 m/s y 60 m/s , con $\chi = 2,5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.4.3. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 5 \text{ Hz}$

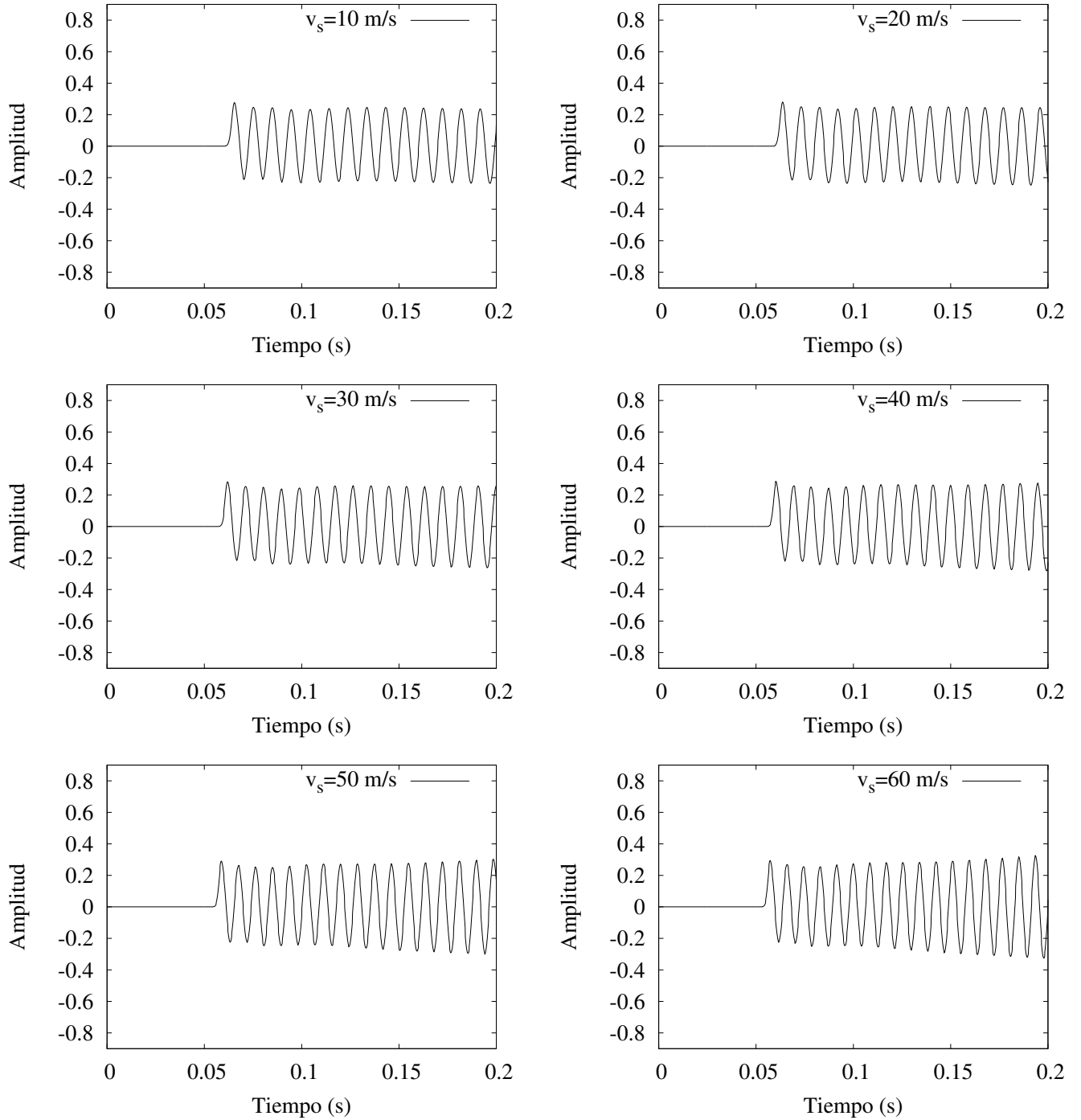


Figura F.4.3: El observador se acerca a una fuente de sonido inmóvil, $\vec{v}_s = 20 \text{ m/s}$. La velocidad del observador varía entre 10 m/s y 60 m/s , con $\chi = 2,5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.4.4. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 7,5 \text{ Hz}$

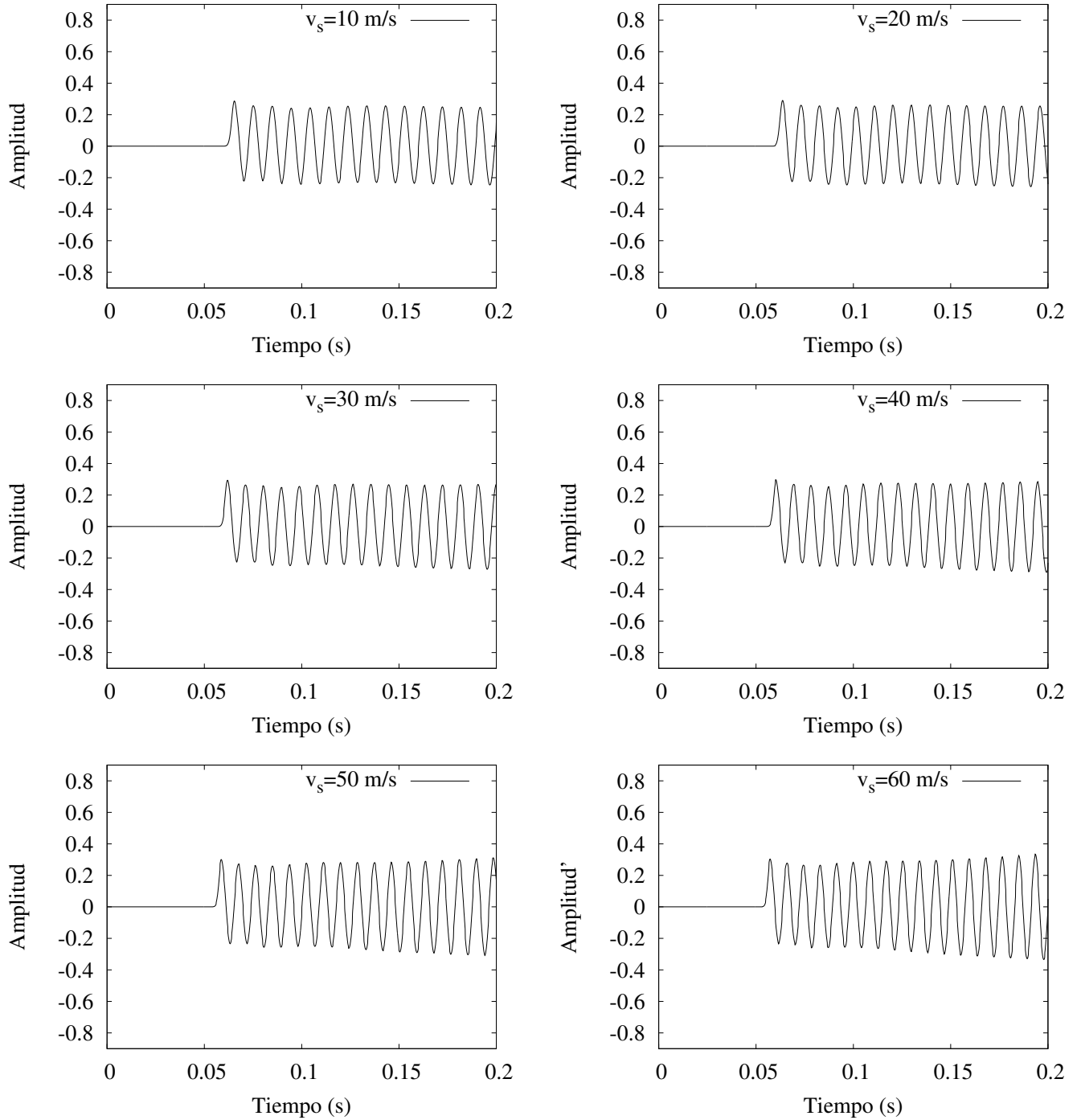


Figura F.4.4: El observador se acerca a una fuente de sonido inmóvil, $\vec{v}_s = 20 \text{ m/s}$. La velocidad del observador varía entre 10 m/s y 60 m/s , con $\chi = 2,5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.

F.4.5. Coeficiente de atenuación por difusión $\chi = 10 \text{ Hz}$

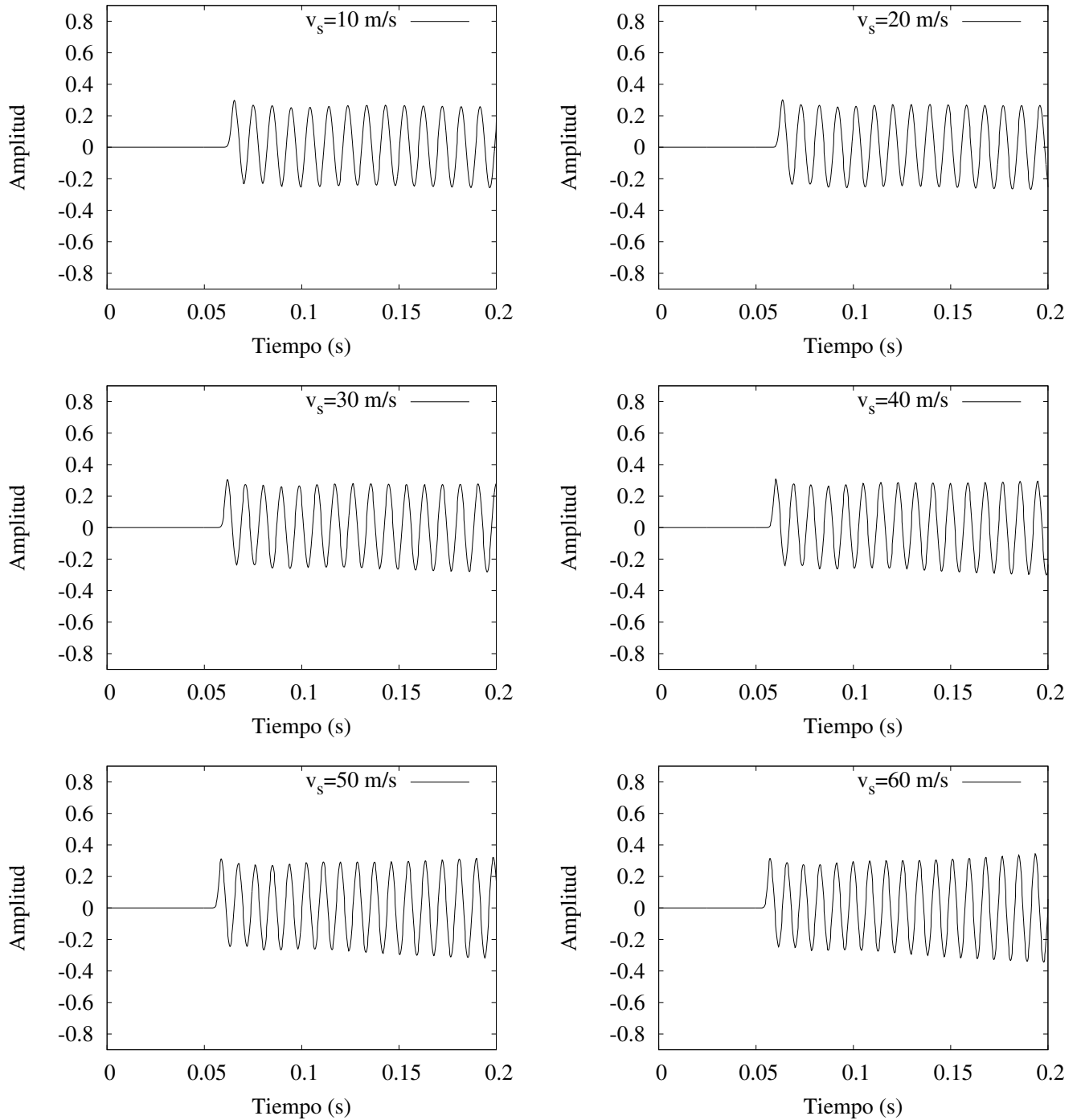


Figura F.4.5: El observador se acerca a una fuente de sonido inmóvil, $\vec{v}_s = 20 \text{ m/s}$. La velocidad del observador varía entre 10 m/s y 60 m/s , con $\chi = 2,5 \text{ Hz}$ y $\gamma = 1,8 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$.